RHMP
REVISTA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

ISSN: 2317-9546 ***e*-ISSN**: 2675-715X

A NOÇÃO DE SENO PELO ESTUDO DAS CORDAS E MEIAS-CORDAS: CONTEXTUALIZANDO COM A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Guilherme Oliveira Santos[1]
Raissa Araujo de Oliveira [2]
Lucieli M. Trivizoli[3]

RESUMO

Este trabalho foi constituído a partir de discussões ocorridas no âmbito do Grupo de Estudos em História da Matemática e Educação Matemática (GHMEM), e busca subsidiar professores na abordagem de conteúdos de trigonometria, em particular do conceito de seno. Tem-se por objetivo evidenciar as relações que podem ser estabelecidas entre o raio da circunferência e a medida dos ângulos, utilizando a construção da relação do seno a partir da contextualização histórica. Para isso, a História da Matemática e a confecção de um material manipulável são as estratégias adotadas para a construção da relação do seno. Espera-se que a partir desses encaminhamentos, hajam discussões que contribuam para a desmistificação da visão de que a matemática é uma ciência pronta e acabada, bem como auxiliem os alunos no processo de compreensão da relação em questão. Nesse sentido, entende-se que essa proposta pode auxiliar os professores ao trabalharem esse tema, possibilitando tanto a compreensão da relação de seno em si, quanto oportunizando a retomada de conceitos e saberes trabalhados em anos anteriores, necessários para as resoluções das atividades.
Palavras-chave: História da Matemática. Trigonometria. Seno.

INTRODUÇÃO

Pontuar com exatidão quando surgiu a trigonometria é uma tarefa difícil. Segundo Eves (1995) é possível identificar problemas no papiro Rhind que envolviam ideias que hoje entendemos como conceitos relacionados a cotangente. O autor também traz que ao tomarmos as notações dos astrônomos babilônicos, temos as ideias que deram origem ao que hoje entendemos como trigonometria esférica. Ao longo da história, a trigonometria foi se modificando e se constituindo até chegar à forma que conhecemos atualmente.

A trigonometria está presente dentre os objetos de conhecimento que compõe o currículo escolar, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018). Apesar de prescrito nos documentos oficiais, Stal (2017) destaca que esse objeto de conhecimento é considerado por estudantes e professores como algo difícil de se aprender e

[1] Professor na Rede Particular de Ensino. Mestrando do PRPGEM – UNESPAR. Licenciado em Matemática pela UEM. E-mail: prof.guilherme.o.s@gmail.com
[2] Professora na Rede Estadual de Ensino do Estado do Paraná. Pedagoga pela UNIFAMMA. Licenciada em Matemática pela UEM. E-mail: prof.raissaoliveiramat@gmail.com
[3] Professora Adjunta na Universidade Estadual de Maringá. Doutora em Educação Matemática pela UNESP-Rio Claro. E-mail: lutrivizoli@gmail.com
.

ensinar. Por parte dos alunos, a dificuldade se mostra pela linguagem simbólica, pelo uso simultâneo de sistemas sexagesimais e decimais ou pela desconexão com possíveis aplicações; quanto aos professores, o ensino deste tópico pode ser confuso devido a pouco ou nenhum contato ao longo de sua formação, já que segundo Stal (2017), "o conteúdo de trigonometria não é apresentado explicitamente nas Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, bacharelado e licenciatura (2001)".

Visando uma forma diferente ao ensino denominado tradicional, optamos por utilizar a História da Matemática para abordarmos a trigonometria. Para D'Ambrosio (2021), a História da Matemática no contexto pedagógico tem como principal aspecto o seu valor motivacional para o estudo da Matemática, instigando os alunos, causando-os curiosidades sobre determinados assuntos de forma a explorar pontos intrigantes da formação de determinado objeto de conhecimento. Ainda segundo o autor, as reflexões colocadas e levantadas, podem gerar maior interesse nas aulas de Matemática.

Dessa forma, apresentamos a seguir uma proposta de quatro atividades exploratórias envolvendo a trigonometria, mais especificamente a ideia de seno, enfocando no estudo das cordas e meia-cordas. Na próxima seção, apresentamos uma contextualização histórica de forma a subsidiar o professor ao aplicar a sequência proposta. Posteriormente apresentamos a sequência com descrição e comentários e, por fim, nossas considerações.

CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA[4]

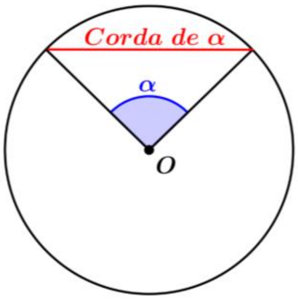
A Trigonometria pode ter seu desenvolvimento associado ao estudo da astronomia, agrimensura e navegação. Segundo Felix (2011), se formos evidenciar a história da Trigonometria com a simbologia que conhecemos, nos voltaríamos ao século XVII, mas se considerarmos o uso da geometria na Astronomia, retornaremos pelo menos a Hiparco no século II a.E.C., e se pensarmos somente como "medidas do triângulo", pensaremos em milênios antes da era comum.

Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2012), Hiparco tinha o objetivo de encontrar um modelo que fosse capaz de descrever o movimento dos astros e planetas no céu ao anoitecer, bem como determinar a rotação da Terra ao longo das estações do ano. A representação do céu era dada por uma grande esfera e as posições dos astros no céu eram designadas por ângulos. Devido à dificuldade de se trabalhar com ângulos, Hiparco teria os associado a segmentos de

[4] Para aqueles que desejarem se aprofundar mais no tema, sugerimos consultar as fontes aqui mencionadas: Felix (2011), Berlinghoff e Gouvêa (2012) e Rodrigues (2020).

retas que ficaram conhecidos como *corda*. Essa associação era feita como mostrado na Figura 1.

Figura 1 – Corda de um ângulo α



Fonte: Adaptado de Berlinghoff e Gouvêa (2012, p. 189).

Hiparco então teria, segundo Rodrigues (2020), construído uma tabela, que relacionava diferentes tamanhos de cordas para serem consultadas e utilizadas em algumas situações. Uma delas dizia respeito à excentricidade da órbita do Sol[5], em que relacionado os $365\frac{1}{4}$ dias (que correspondem a um ano) com 360º, foi possível converter a duração das estações do ano para graus. Apesar de sua utilidade, essa tabela não sobreviveu ao tempo, de forma que não sabemos como os gregos realizavam seu cálculo. De acordo com Berlinghoff e Gouvêa (2012), as referências sobre essa tabela são feitas por outros matemáticos gregos.

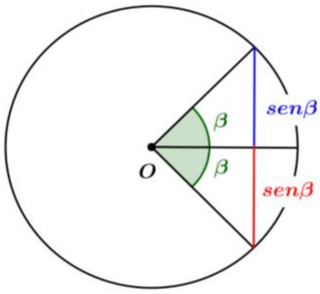
Cláudio Ptolomeu (ou Claudius Ptolomeu), posterior a Hiparco, também adotou a ideia das cordas subtendidas por um ângulo. Segundo Rodrigues (2020) na segunda metade do século II, ele publicou sua obra prima que hoje conhecemos por Almagesto (ou Almagest). Nessa obra, além de elaborar teoremas e desenvolver a teoria das cordas, Ptolomeu explicou como seria possível construir uma tabela de cordas. Berlinghoff e Gouvêa (2012) afirmam que Ptolomeu construiu aproximações das cordas de ângulos de $\left(\frac{1}{2}\right)°$ a 180°.

Depois de Ptolomeu, ainda segundo Berlinghoff e Gouvêa (2012), na Índia, foi encontrado um trabalho escrito no século V d.E.C., o qual possuía uma tabela de "meias-cordas". Isso foi um passo importante, pois verificou-se que em algumas situações era necessário utilizar a *metade da corda do dobro do ângulo*. A partir disso, os astrônomos indianos passaram a usar a tabulação da metade das cordas, as quais eram chamadas de *jyā-ardha* (posteriormente denominada *jyā*).

[5] Hiparco teria observado que do equinócio da primavera até o do outono era de aproximadamente 186 dias, enquanto a outra metade da órbita solar ocorreria em apenas 179 dias. Dessa forma, ele acreditava que a Terra não ocuparia o centro da órbita elíptica do sol, mas que se afastaria do sol no período da primavera. (Mais informações em Rodrigues (2020).

As meias-cordas utilizadas pelos matemáticos indianos, equivalem ao que hoje conhecemos por seno. Porém, enquanto entendemos seno como sendo a razão entre o que seria a meia corda e o raio do círculo (observe a Figura 2), para os indianos a meia-corda era “[...] o real segmento em um círculo com um raio particular [...]. Em outras palavras, a meia-corda é um segmento cujo comprimento é $R\ sen\ \alpha$” (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2012, p. 190).

Figura 2 – Meias-Cordas



Fonte: Adaptado de Berlinghoff e Gouvêa (2012, p. 190).

Com base nessas construções dos matemáticos indianos, os árabes acrescentaram suas próprias ideias à teoria das cordas, sofisticando a Trigonometria e relacionando-a com a Álgebra. Suas produções posteriormente foram encontradas pelos europeus que logo traduziram e estudaram-nas. Devido às traduções, o termo $jy\bar{a}$ foi traduzido pelos árabes como *jiba*, que havia sido abreviado como jb. Os europeus em suas traduções assumiram jb como *jaib*, traduzindo esse termo como *sinus*, que posteriormente viria a se tornar o termo que utilizamos atualmente: *seno*.

PROPOSTA[6]

Tema: Trigonometria

Número de Aulas: 6 horas-aulas com duração de 50 minutos cada.

Objeto de Conhecimento abordado: Seno.

Materiais: Papelão, papel sulfite (ou um pedaço de Kraft), barbante, compasso, transferidor, folha de papel, lápis e caneta.

Objetivo: Compreender a noção de seno pela contextualização histórica do estudo das cordas e das meia-cordas de um ângulo.

[6] Devido ao novo Ensino Médio, com a organização dos Itinerários Formativos que podem variar de um estado para o outro, cabe ao professor identificar a turma a ser aplicada essa proposta, com as devidas adequações para cada nível. Apesar de não constar na BNCC, alguns materiais didáticos já apresentam o conceito de seno nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

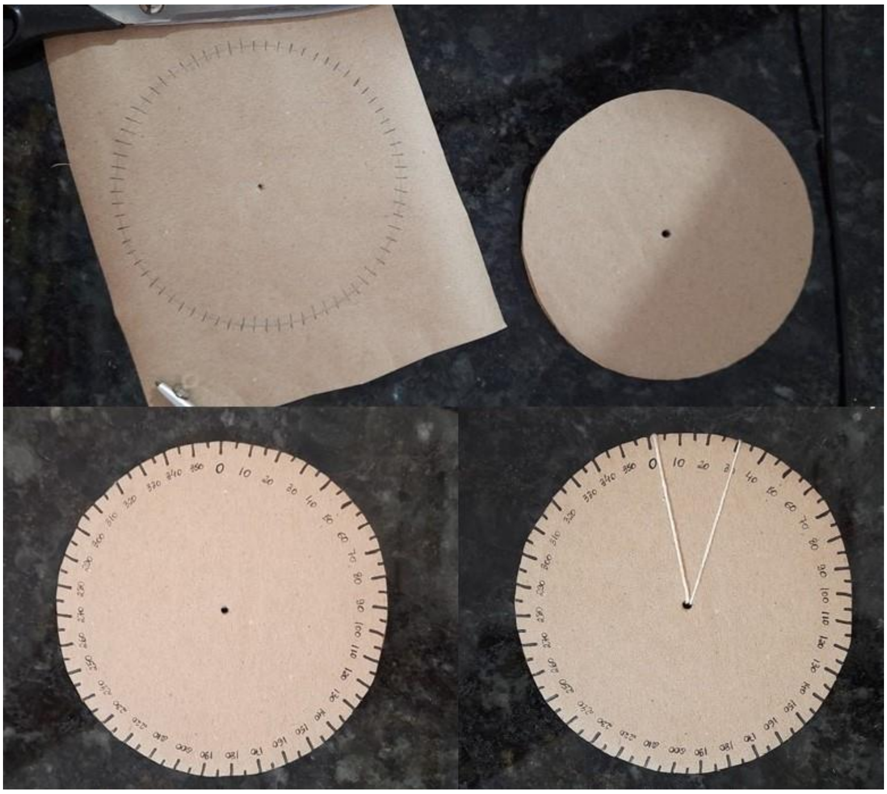
Nessa seção, apresentamos quatro atividades que foram baseadas nas propostas de Berlinghoff e Gouvêa (2012). A Atividade 1 consiste em construir o material manipulável junto aos alunos, sendo uma oportunidade para o professor retomar o uso do transferidor. As Atividades 2 e 3, tem por objetivo determinar as cordas dos ângulos de 180°, 90°, 60° e 120°, sendo que as cordas desses três últimos ângulos serão utilizadas na Atividade 4. Na Atividade 4, o objetivo é utilizar o conceito da meia-corda, estabelecendo relações entre as meias-cordas dos ângulos e o raio do círculo, obtendo assim o seno de um determinado ângulo. Em particular, na Atividade 4, exploraremos os senos dos denominados Ângulos Notáveis.

Atividade 1: Construção do Material Manipulável

Para a construção do material manipulável, serão necessários papelão, papel (pode ser sulfite ou um pedaço de Kraft) barbante, compasso e transferidor. Deve ser traçado um círculo no papelão e um círculo num papel a ser colado no papelão, com raio de 6cm e um furo em seu centro para que dois barbantes passem por ele, como mostra a Figura 3. Com auxílio do transferidor, devem ser marcados os ângulos de 5 em 5 graus, evidenciando os ângulos a cada 10 graus para evitar um acúmulo de notações. Caso o professor queira um material reforçado, podem ser colados dois círculos de papelão para formar o material.

Com esse material, os barbantes representam o papel dos raios do círculo e a corda de determinado ângulo pode ser representada por um pedaço de barbante esticado, por uma faixa de papel ou mesmo por uma régua ou outro material reto que possa representá-la.

Figura 3 – Material Manipulável



Fonte: Os Autores

Nessa primeira atividade também é o momento de o professor fazer uma contextualização histórica, explicando a ideia das cordas em uma circunferência, mas sem ainda apresentar a relação com o seno. Para isso o professor pode utilizar a contextualização que apresentamos na seção anterior e também as referências que indicamos.

Atividade 2: Determinando a medida da corda do ângulo de 180º

A segunda atividade parte da seguinte situação: "Ptolomeu no Almagesto construiu uma tabela de cordas, usando um círculo de raio 60u.c.[7]. Partindo do nosso círculo que tem 6cm de raio, qual seria a medida da corda do ângulo de 180°?" Com essa atividade, o objetivo é que os alunos concluam que a corda relativa ao ângulo de 180° corresponde ao diâmetro da circunferência (12cm), por meio da manipulação dos dois barbantes.

Sugerimos que antes de apresentar a pergunta, o professor busque explorar a contextualização feita na Atividade 1, evidenciando o processo de se determinar as cordas de

[7] O termo *u.c.* significa unidades de comprimento. Pode-se utilizar centímetros, decímetros, metros ou outra medida/relação entre medidas (por exemplo $1u.c. = 2cm$).

um ângulo e relacionando com a Astronomia[8]. Recomendamos, também, que o professor dê espaço para que os alunos experimentem determinar a corda do ângulo de 180°

Atividade 3: Determinando a medida da corda dos ângulos de 90°, 60° e 120°

A terceira atividade parte da seguinte questão: “Tendo um quadrado inscrito numa circunferência, podemos determinar a medida de seu lado, usando o estudo de cordas e meia cordas que os indianos utilizaram? Se sim, qual é essa medida para o círculo que construímos? Podemos determinar também o lado de um triângulo inscrito na circunferência? E de um hexágono regular inscrito na circunferência?”

Uma forma de solucionar essa questão seria desenhar um quadrado inscrito no material construído e observar que colocando os barbantes sobre dois vértices do quadrado, obtemos um ângulo de 90°, logo o lado desse quadrado (l) corresponde à medida da corda do ângulo de 90°, como mostra a Figura 4. Se optarem por essa estratégia, o professor deve recomendar aos alunos para fazer o traço sem forçar o lápis, de forma que seja possível apagar os traços depois para continuar utilizando o material.

Uma outra opção, é pensar que para inscrever um quadrado em uma circunferência, é preciso determinar em quais pontos da circunferência estão os vértices do quadrado. Por ser um polígono regular e possuir quatro vértices, dividindo a circunferência (360°) em quatro partes, temos que a cada 90° há um dos vértices do quadrado.

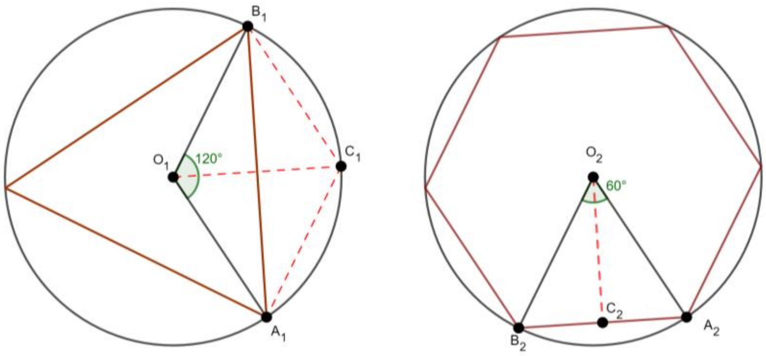
Figura 4 – Uma possível resolução para a Atividade 3

Fonte: Os Autores

[8] Sugerimos a seguinte referência para se abordar a questão da astronomia: COSTA, D. S. Astronomia e Trigonometria: as cordas de Ptolomeu. **DocPlayer**, 2016. Disponível em: https://docplayer.com.br/24444524-Astronomia-e-trigonometria-as-cordas-de-ptolomeu.html. Acesso em: 15 jul. 2022.

Um outro ponto a ser observado é que ao posicionar os barbantes em dois vértices consecutivos do quadrado, assim o lado do quadrado correspondendo à medida da corda de 90°, temos um triângulo retângulo. Assim aplicando o teorema de Pitágoras conseguimos obter a medida da corda de 90° ($l^2 = 6^2 + 6^2 \Rightarrow l = 6\sqrt{2}cm$), que equivale ao lado do quadrado. Essa resolução é apenas uma possível, pois o quadrado pode estar marcado com seus vértices nas marcações de outros ângulos. Com relação ao processo para determinar a medida do lado do triângulo e do hexágono regular, deixamos aqui duas sugestões.

Figura 5 – Resoluções possíveis



Fonte: Os Autores

Para o lado do triângulo, que corresponde a corda do ângulo de 120°, sugerimos que seja feita a construção de um losango e utilizadas as propriedades para determinar a corda, relacionando-a com o raio da circunferência (como mostra a figura 5). Já com relação ao hexágono, sugerimos que seja obtida a corda do ângulo de 60° utilizando propriedades e congruência de triângulos, considerando esse triângulo como isósceles (dois lados correspondem ao raio da circunferência) para mostrar que ele será equilátero. Assim obtém-se como corda do ângulo de 120° a medida de $6\sqrt{3}cm$ e do ângulo de 60°, $6cm$.

Atividade 4: As meias-cordas

A quarta atividade parte das seguintes questões: “Como podemos determinar a medida da corda do ângulo de 45°? E a de 30°?” A sugestão é começar pelo ângulo de 45º e a princípio os alunos podem encontrar dificuldade em determinar a medida da corda. Uma sugestão é que os alunos utilizem as cordas já calculadas, observando que 45° corresponde à metade de 90°, supondo então que a corda referente a 45° seja metade da corda referente a 90°. O professor nesse momento pode apresentar a relação de meia corda que foi notada pelos indianos, determinando assim que a medida da corda do ângulo de 45° é $3\sqrt{2}$cm. Analogamente para determinar a medida da corda do ângulo de 30º, que é 3cm.

Dessa forma, os alunos podem ser questionados sobre o que aconteceria caso o raio do círculo fosse alterado. Uma forma de analisar o que ocorreria é por meio da construção, em conjunto com os alunos, de uma tabela como a seguinte:

Tabela 1 – Relações entre o Raio, a medida da Corda e da Meia Corda

Ângulo (β)	**Metade do Ângulo β (α)**	**Raio do Círculo (r)**	**Medida da Corda de β**	**Medida da Meia-Corda β**
$90°$	$45°$	$6cm$	$6\sqrt{2}cm$	$\frac{6\sqrt{2}}{2}cm$
		$3cm$	$3\sqrt{2}cm$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}cm$
		$1cm$	$\sqrt{2}cm$	$\frac{\sqrt{2}}{2}cm$
$120°$	$60°$	$6cm$	$6\sqrt{3}cm$	$\frac{6\sqrt{3}}{2}cm$
		$3cm$	$3\sqrt{3}cm$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}cm$
		$1cm$	$\sqrt{3}cm$	$\frac{\sqrt{3}}{2}cm$
$60°$	$30°$	$6cm$	$6cm$	$\frac{6}{2}cm$
		$3cm$	$3cm$	$\frac{3}{2}cm$
		$1cm$	$1cm$	$\frac{1}{2}cm$

Fonte: Os Autores

Retomando que as meias-cordas utilizadas pelos matemáticos indianos equivalem ao que hoje conhecemos por seno, o professor pode lançar o seguinte questionamento: existe alguma outra forma de determinar a meia-corda, isto é, o seno de um ângulo? Sugerimos que seja dado um tempo para que observem e tentem encontrar as relações. O professor pode sugerir que os alunos busquem identificar o que se altera e o que se mantem para cada ângulo.

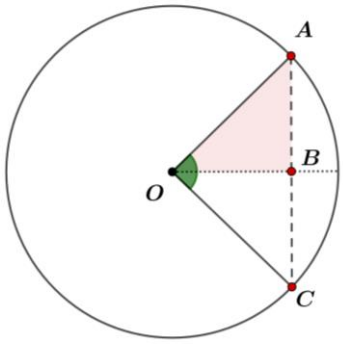
Espera-se que os alunos identifiquem que a meia-corda corresponde ao produto da medida do raio do círculo pela medida do seno daquele ângulo. Disso, concluímos que o seno daquele ângulo é dado pela razão entre a medida da meia-corda pelo raio do círculo. De forma algébrica:

$$meia - corda(\beta) = r \cdot sen(\alpha) \Rightarrow sen(\alpha) = \frac{meia - corda(\beta)}{r}$$

Cabe ao professor relacionar essa relação do seno, com os elementos do triângulo retângulo. Com base na Figura 5, o professor pode reproduzi-la, identificando com os alunos a meia-corda como sendo o segmento $\overline{AB}$ e raio do círculo como sendo o segmento $\overline{OA}$. Observando os pontos OAB, tem-se um triângulo retângulo[9], em que o segmento $\overline{OA}$ corresponde à hipotenusa e os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{OB}$ os catetos. Nesse momento o professor deve diferenciar cateto oposto e cateto adjacente a um ângulo, finalizando então a relação seno como sendo:

$$sen(\alpha) = \frac{Cateto\ Oposto}{Hipotenusa}$$

Figura 5 – Apoio para a formalização da relação do seno em um triângulo retângulo



Fonte: Os Autores

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Com a proposta aqui apresentada, tivemos por objetivo trabalhar uma associação do comprimento da corda com o raio de uma circunferência, dado um ângulo central. Dessa associação, buscamos explorar os conceitos envolvidos, de forma a construir a ideia do seno de um ângulo. Compreendemos que ao estabelecer essas relações, realizando uma reconstrução histórica relativa a esse conceito, possibilitamos a desmistificação da Matemática, o que pode levar a um estímulo à investigação por parte do aluno, bem como pode expandir a compreensão do tema.

Como encaminhamentos futuros, uma sugestão de continuidade desta proposta é abordar a questão do cosseno de um ângulo definindo o cosseno como o seno do ângulo complementar daquele ângulo. A utilização dessa definição pode auxiliar ao aluno perceber as relações entre seno e cosseno de 30º e 60º, por exemplo, bem como a relação de igualdade entre

[9] Isso pode ser demonstrado usando semelhança de triângulos pelo caso LLL ou LAL.

o seno e o cosseno de 45º. Por fim, destacamos que essa proposta é passível de adaptação para a realidade escolar do professor.

REFERÊNCIAS

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. Metade é melhor: Seno e cosseno. *In:* BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A Matemática Através dos Tempos:** Um Guia Fácil e Prático para Professores e Entusiastas. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2012. Cap. 18.

BRASIL, Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC/SEF, 2018.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: UNICAMP, 1995. Tradução de Hygino H. Domingues.

FELIX, D. D. **História da trigonometria**: um levantamento dos trabalhos produzidos nos cursos de especialização e graduação do departamento de matemática. 2011. 45 f. Monografia (Especialização) - Curso de Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011.

STAL, J. Ç. **Trigonometria na formação inicial de professores de matemática**. 2017. 158 f. Dissertação – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017. Disponível em: http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000216027. Acesso em: 15 jul. 2022

D'AMBROSIO, U. A interface entre História e Matemática: uma visão histórico-pedagógica. **Revista história da matemática para professores**, v. 7, n. 1, p. 41 - 64, 31 maio 2021.

RODRIGUES, M. V. S. **Construções de tabelas de seno nas civilizações grega, árabe e indiana**. 2020. 59 f. Dissertação - Universidade de Brasília, Brasília, 2020. Disponível em: https://repositorio.unb.br/handle/10482/38628. Acesso em: 15 jul. 2022.

Submetido em: 13 de dezembro de 2022.
Aprovado em: 06 de janeiro de 2023.