RHMP
REVISTA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

ISSN: 2317-9546 ***e*-ISSN**: 2675-715X

NÚMEROS IRRACIONAIS NA ANTIGUIDADE GREGA CLÁSSICA

Rafael Lameira Barros[1]
Pedro Franco de Sá[2]

RESUMO

Este trabalho apresenta os resultados de um estudo bibliográfico, que tratou sobre como os Números Irracionais desenvolveram-se no contexto da Grécia Antiga. Nele encontra-se a evolução deste conhecimento na Grécia Antiga, a partir das comunidades de estudo, dos Pitagóricos (ca. 550 a.C.) e da Escola de Platão (ca. 387 a.C), ambas eram centros de conhecimento de destaque durante a época da antiguidade clássica (período entre o século VIII a.C. e o século V d.C.). As fontes de pesquisa foram artigos científicos, livros de história da matemática e trabalhos acadêmicos. Os resultados indicam que embora haja evidências de que os irracionais já fossem manipulados em outras civilizações, foi na Grécia Antiga que tiveram um tratamento mais conceitual. Sendo dos Pitagóricos, a possível descoberta do conceito de número irracional, mas este contexto foi acompanhado de fatores que dificultavam o avanço desse conhecimento. Após isso, o estudo dos números irracionais passou a ter maior destaque por volta de 387 a.C. na Escola de Platão, onde muitos membros os manipulavam de forma mais adequada e com mais aceitação.

Palavras-chave: História da Matemática. Números Irracionais. Grécia Antiga.

INTRODUÇÃO

Os números irracionais são números reais que não podem ser escritos em formato de fração. A noção de número irracional abrange várias possibilidades de conceituar este tipo de número. Eles receberam outras denominações como “Números reais não racionais”, “Números que não podem ser escritos na forma de fração”, “Números ligados à grandezas contínuas que não podem ser medidas por racionais”, “Dízimas não periódicas”, etc. Essas e tantas outras compreensões sobre esses números perduraram por muito tempo nos estudos de vários matemáticos durante a história.

Atualmente os números irracionais são comuns em variadas situações e se fazem presentes no ensino de matemática. O assunto tem registro na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), como conteúdo a ser ensinado nos 8º e 9º anos do Ensino Fundamental.

[1] Docente na Escola Municipal de Educação Infantil e Ensino Fundamental Profª Terezinha Souza, Belém, Pará. Mestre em Ensino de Matemática pela UEPA. E-mail: rafael.lbarros@aluno.uepa.br
[2] Docente da Universidade do Estado do Pará, Belém, Pará. Doutor em Educação pela UFRN. E-mail: pedro.sa@uepa.br

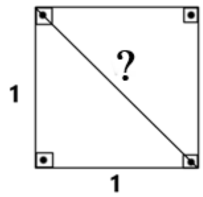
A necessidade de conhecer as bases históricas desse conteúdo matemático escolar é defendida em muitos documentos norteadores do ensino de matemática.

Este artigo apresenta os resultados de um estudo bibliográfico o qual objetivou obter informações sobre como os números irracionais foram percebidos na antiguidade clássica, em particular aos Pitagóricos (ca. 550 a.C.) e na Escola de Platão (ca. 387 a.C).

OS NÚMEROS IRRACIONAIS NA ESCOLA DOS PITAGÓRICOS

A compreensão de que as frações não são suficientes para as atribuições de medidas de grandezas geométricas foram descobertas há 2500 anos pelos Pitagóricos (ca. 500 a.C.), que eram uma comunidade de gregos liderada por Pitágoras, os quais estudavam filosofia, matemática e ciências naturais (EVES, 2004). Essa descoberta aconteceu ao demonstrarem a impossibilidade em determinar a medida da diagonal de um quadrado de lado 1 como um número inteiro ou uma razão de dois inteiros. Sendo então as medidas da diagonal desse quadrado e de seu lado, foram ditas incomensuráveis.

Figura 1 – Quadrado de lado 1



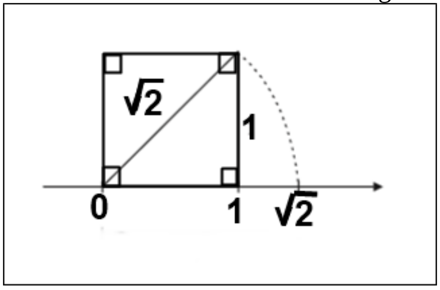
Fonte: Autores (2021).

Para compreender a noção de medida incomensurável, é importante entender o que são medidas comensuráveis. Quando se compara as medidas de dois segmentos, pode ocorrer que a medida de um deles seja um múltiplo inteiro da medida do outro, ou seja, dados dois segmentos de reta a e b, a medida de a está contida na medida de b, um número r inteiro de vezes ($b = r.a$). Entretanto, quando isto não é possível, podemos dividir o segmento a em p segmentos de medidas iguais a $\frac{a}{p}$ de modo que $b = \frac{l}{p}a$, ou seja, b seria l vezes o segmento $\frac{a}{p}$. Diante destes dois casos, as medidas dos segmentos a e b são chamadas comensuráveis (LORIN; REZENDE, 2013). Entretanto, quando nenhum desses casos acontece entre duas medidas, elas são ditas incomensuráveis.

Como não ocorre nenhuma das possibilidades acima entre as medidas da diagonal e do lado de um quadrado de lado 1 (figura 1), então é possível indicar que as medidas dessa diagonal e do lado 1 são incomensuráveis. Provavelmente os Pitagóricos se questionaram: quais relações seriam estabelecidas entre esses segmentos?

Ao considerar um dos triângulos da figura 1 e aplicando o teorema de Pitágoras pode-se perceber que a medida da diagonal corresponde a raiz quadrada de 2. Utilizando um compasso, é fácil marcar na reta numérica um segmento de medida igual a essa diagonal (ver figura 2).

Figura 2 – Quadrado de lado 1 com a medida da diagonal projetada na reta



Fonte: Autor (2021).

Conforme Moscibroski (2002), essa percepção representou o primeiro exemplo conhecido de segmento não racional. Sendo Hipaso de Metapotum (470 a.C.), um dos Pitagóricos que teria descoberto a existência desse tipo de medida.

Hipaso compreendeu que a condição sobre medidas comensuráveis não era obedecida para a medida citada, assim, não era possível medir com régua e compasso o comprimento da diagonal do quadrado. Ele mostrou que não existe racional que seja a medida da diagonal de um quadrado de lado 1. Essa descoberta provocou conflitos entre os Pitagóricos, já que se contrapôs ao paradigma pitagórico de que toda medida fosse racional, isto é, fração de números inteiros (EVES, 2004).

Não se sabe ao certo o procedimento que os Pitagóricos realizaram para comprovar que a medida encontrada da diagonal do quadrado não era uma razão de dois inteiros, entretanto, Lorin e Rezende (2013) indicam que, a partir de alguns fragmentos deixados por alguns Pitagóricos após a morte de Pitágoras, é possível supor algumas formas de como eles tinham conseguido demonstrar tal feito. Uma dessas possíveis demonstrações é a seguinte:

Considerando a situação descrita anteriormente de um quadrado de lado 1, dividido em dois triângulos retângulos. Suponhamos, por contradição, que o comprimento da hipotenusa de um desses triângulos seja um número racional $\frac{p}{q}$ com p e q inteiros positivos diferentes de 0 e sendo eles números primos entre si, isto é, não possuem fatores comuns. Usando o teorema de Pitágoras, tem-se $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ que implica em $\frac{p^2}{q^2} = 2$,que é equivalente a $p^2 = 2q^2$.

Isso nos diz que o número p^2 é par, assim p é par, ou seja, $p = 2k$, para algum inteiro positivo k.

Logo $p^2 = 2q^2$ equivale a $(2k)^2 = 2q^2$, que é equivalente a $4k^2 = 2q^2$ que implica em $q^2 = 2k^2$ e então q^2 é par, com isso temos que q é par. Portanto, p e q são pares. Sendo p e q primos entre si então eles não podem ser simultaneamente pares e isso é uma contradição. Assim, o número que mede a hipotenusa, isto é, o número $\sqrt{2}$, não é racional.

O problema da incomensurabilidade frustrou os pitagóricos gregos, pois muitas demonstrações geométricas, em especial as que envolviam razão e proporção, consideravam que segmentos quaisquer sempre admitiam uma unidade de comprimento comum. Tal frustração caracterizou um episódio posteriormente conhecido como *crise dos incomensuráveis*.

A concepção de incomensurabilidade da época se contrapôs à filosofia pitagórica, que admitia que todo número é inteiro ou é composto de uma relação entre inteiros. Medidas incomensuráveis eram, portanto, impossíveis de serem assim expressas e também inimagináveis, devido não puderem ser representadas como razão de números inteiros, sendo este, um princípio elementar para a compreensão de número conforme os Pitagóricos (POMMER, 2012).

Algo curioso sobre os Pitagóricos, era que eles referenciavam as medidas incomensuráveis pelo termo *alogon*, que atualmente traduz-se como "irracional". Naquela época a palavra *alogon* também significava "não deve ser falado" (MLODINOW, 2004).

Há evidências de que os Pitagóricos tinham noção dos números irracionais, apesar de pouco aceita naquela sociedade, para Kline (1972, apud Lopes; Sá, 2016), antes da "crise dos incomensuráveis" ter ocorrido na Grécia, os números irracionais já eram conhecidos na Mesopotâmia. Uma evidência desse fato está nas tábuas de potências e raízes dos babilônios, cujo registro mostra que quando o valor da raiz era um inteiro se tinha um valor exato, caso contrário, o valor sexagesimal correspondente era aproximado.

A descoberta da incomensurabilidade, pelos Pitagóricos, levou a ideia de que somente o discreto não era possível contemplar todas as medidas. Só depois de muito tempo, o conceito de número foi expandido para medir grandezas contínuas, possibilitando o tratamento dos incomensuráveis como número (BROETTO, 2016).

A partir da concepção de contínuo, a ideia da medida se tornou mais abrangente, permitindo tratar naturais, racionais e irracionais em um único contexto, que privilegia o contínuo e interpreta o discreto como um caso particular. Este raciocínio não foi explorado pela escola pitagórica, que até aquele momento se restringia ao discreto.

Uma tentativa de explicar a continuidade a partir do discreto foi proposta pela "teoria das mônadas", que tomava como base a existência de segmentos indivisíveis chamados de mônadas. Esta teoria não teve sucesso, foi constantemente rebatida pelas escolas gregas posteriores aos Pitagóricos. Havia contradições lógicas nos argumentos dos Pitagóricos encontradas por Zenão de Eléia (cerca de 490/485 a.C. - 430 a.C.) (LORIN; REZENDE, 2013).

Zenão foi um filósofo que mostrou as incoerências decorrentes da tentativa de se completar grandezas contínuas com um número infinito de pequenas partículas, essas incoerências se baseiam em alguns paradoxos que atualmente são chamados de "Paradoxos de Zenão"[3] (SANTOS, 2015). Nos paradoxos de Zenão da Dicotomia, Aquiles e a Tartaruga, da Flecha, e do Estádio, foi argumentado que se o tempo e o espaço são infinitamente divisíveis, o movimento torna-se impossível (SANTOS, 2015).

OS NÚMEROS IRRACIONAIS NA ESCOLA DE PLATÃO

Do contato dos Pitagóricos com as grandezas incomensuráveis, e terem sua filosofia numérica, contestada por Zenão, surgiu uma escola grega a cerca de 387 a.C, cujo líder era Platão, que buscou compreender essas grandezas (LORIN; REZENDE, 2013). Nesta Escola havia os matemáticos Teodoro (465 a 398 a. C.), Eudoxo (408 a 355 a.C.) e Euclides (360 a 295 a.C.).

A motivação da escola platônica pelas grandezas incomensuráveis, estava em desenvolver técnicas geométricas que permitissem manejar essas medidas (GODEFROY, 1997, *apud* LORIN; REZENDE, 2013). Até a época de 408/355 a.C. o problema da incomensurabilidade ainda era pouco explorado na matemática. Na área que envolvia relações de proporção, era tratado somente de grandezas comensuráveis, foi Eudoxo quem avançou nos estudos para grandezas incomensuráveis por volta de 370 a.C. (MOSCIBROSKI, 2002).

Eudoxo de Cnido foi um matemático, astrônomo e filósofo grego que viveu entre os anos de 408/355 a.C.. Conforme Cerri (2006), ele resolveu o problema da incomensurabilidade que impedia com que se pudesse trabalhar com grandezas dessa natureza. Sua teoria, em linguagem moderna, estabelece que para conhecer um número irracional basta conhecer suas aproximações por falta e por excesso.

[3] Para conhecer mais sobre os paradoxos de Zenão visite o link: https://fepex.saofrancisco.ifc.edu.br/wp-content/uploads/sites/14/2016/08/Alexandre-Pereira-de-Vasconcellos.pdf

Dessa maneira, é possível obter aproximações de um número irracional com um erro tão pequeno quanto se queira (MOSCIBROSKI, 2002). Diante disso, ao comparar duas grandezas da mesma espécie, em vez de número, Eudoxo adotou o conceito de "razão entre duas grandezas”. Ele construiu, de forma lógica, uma teoria sobre razões entre grandezas.

No V livro de “Os Elementos”, de Euclides, é encontrado o estudo desenvolvido por Eudoxo sobre a Teoria das Proporções. Esta teoria abrange tanto grandezas comensuráveis, como também incomensuráveis (BOMGIOVANI *et al*, 2018).

Abaixo está um trecho encontrado em Os Elementos em que é tratado da teoria de Eudoxo, conforme Bomgiovani *et al*. (2018).

> Diz-se que quatro grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando equimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ambos menores que, os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondentes”. (Elementos de Euclides, Livro V, definição 6).

Em linguagem moderna, o que foi abordado a respeito de grandezas comensuráveis e incomensuráveis, é o seguinte:

Para quaisquer inteiros p e q dizemos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (a está para b, assim como c está para d) se, e somente se, alguma das situações a seguir acontecer:

1) Se $aq = bp$, então $cq = dp$ são grandezas comensuráveis;

2) Se $aq < bp$, então $cq < dp$ são grandezas incomensuráveis

3) Se $aq > bp$, então $cq > dp$ são grandezas incomensuráveis.

Dessa maneira, foi possível trabalhar com grandezas comensuráveis e incomensuráveis, possibilitando a prova de vários resultados como o Teorema de Tales para os casos de medidas comensuráveis e incomensuráveis (CERRI, 2006).

Para Bomgiovani *et al* (2018), a definição construída por Eudoxo conseguiu contornar o problema dos “incomensuráveis” simplesmente através do uso de comparações “menor”, “maior” e “igual”, definindo desse modo, relações de proporção, mas evitando discutir a natureza dos números irracionais. Assim, a questão de se obter um número associado a cada segmento, representando sua medida, não foi tratado de forma direta, embora Eudoxo seja conhecido, por muitos estudiosos, como o primeiro a construir uma teoria que manipulava números irracionais.

A abordagem de Eudoxo das grandezas incomensuráveis coincide em essência com a moderna teoria dos números irracionais, dada por Richard Dedekind em 1872. Ocorreu uma deficiência no formalismo desenvolvido por Eudoxo, que foi não efetuar operações aritméticas com razões (MOSCIBROSKI, 2002).

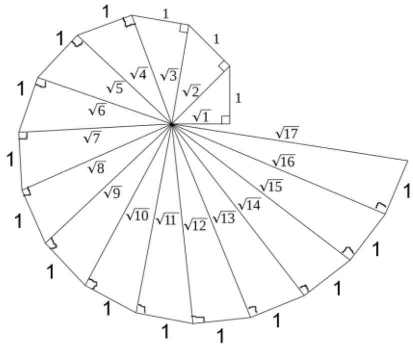
Outros integrantes da escola platônica fizeram estudos sobre números irracionais, sendo muitos desses estudos concentrados na produção de métodos para resolver problemas de quadratura. Para Godefroy (1997), nesses métodos usava-se a ideia de raiz quadrada para se determinar a medida do lado do quadrado a partir de sua área. Foi nesse momento que novos números irracionais, além da $\sqrt{2}$começaram a ser discutidos.

Segundo Moscibroski (2002), foi Teodoro de Cirene (c.470 a.C.), integrante da escola platônica, quem por volta de 425 a.C. mostrou que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$ eram números irracionais.

De acordo com Lorin e Rezende (2013), nos *Diálogos de Platão,* são descritos um relato de uma discussão entre Teeteto e Sócrates, no qual, Teeteto comenta que foi demonstrada a irracionalidade dos números $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$, por Teodoro. Tem-se a seguir um trecho desse diálogo: “Teeteto - A respeito de algumas potências, Teodoro, aqui presente, mostrou que a de três pés e a de cinco, como comprimento não são comensuráveis como a de um pé. E assim foi estudando uma após a outra, até a de dezessete pés. Não sei por que parou aí ” (PLATÃO, 1988, p. 9).

Teodoro de Cirene (c.470 a.C.) ficou conhecido por apresentar uma figura de aspecto espiral, a Espiral de Teodoro ou Espiral Pitagórica (figura 3). Essa figura é obtida de uma sequência de triângulos retângulos com um vértice comum, em que o primeiro é isósceles de catetos unitários e em cada triângulo retângulo sucessivo um cateto é a hipotenusa do triângulo anterior e o outro cateto (oposto ao vértice comum) tem comprimento unitário, esta espiral tem 16 triângulos (EVES, 2004).

Figura 3 - Espiral de Teodoro de Cirene



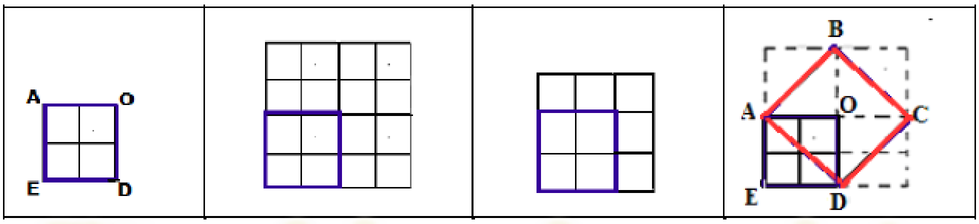
Fonte: Lorenzoni e Sad (2018).

A espiral de Teodoro ilustra a construção de segmentos com medida irracional, partindo da construção geométrica de $\sqrt{2}$, e obtendo segmentos de comprimento $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, e assim sucessivamente, obtendo-se a construção de segmentos de comprimento $\sqrt{n}$, para qualquer n natural maior que 1. Dessa forma, é perpassado por vários números irracionais (LORENZONI; SAD, 2018).

Na época da escola de Platão houve um tratamento mais direto dos números irracionais, os trabalhos de Eudoxo comprovam este fato. Em um trecho dos Diálogos de Platão é descrito uma situação que também evidencia este entendimento, onde Sócrates desenhou um quadrado de "dois pés" de lado, conforme a figura a seguir, e pediu a um escravo de Menon que lhe mostre um quadrado com o dobro da área.

Figura 4 - Construção de um quadrado com o dobro da área de outro quadrado de lado 2 pés

Figura 4a **Figura 4b** **Figura 4c** **Figura 4d**



Fonte: Pommer (2012).

Conforme este relato, um escravo havia argumentado que o quadrado deveria ter quatro pés e Sócrates desenhou uma figura correspondente à figura 1b, o qual revelava que a área inicial havia quadruplicado. Quando percebeu que a área havia aumentado mais do que o solicitado, indicou que o quadrado deveria ter lado três pés (figura 1c), o qual ainda não resolvia o problema inicial. Sócrates, diante do impasse do escravo, desenhou a solução do problema (figura 1d).

A narrativa de Sócrates, presente nos Diálogos de Platão, ilustra a cultura típica dos gregos clássicos. Ao ser traçada a diagonal do quadrado inicial, o triângulo ADO resultante, que era retângulo e isósceles, possui metade da área do quadrado original, assim bastava agrupar quatro triângulos de mesma natureza, e área, para formar uma figura que teria o dobro da área do quadrado, sendo ela, um quadrado (POMMER, 2012).

A situação apresentada a respeito do diálogo entre Sócrates e o escravo de Menon, nos Diálogos de Platão, em linguagem moderna representa a solução da equação algébrica $x^2 = 2$. Também é possível entender, desse diálogo, que quando se tem a área de um quadrado A, cuja área é o dobro de outro quadrado de lados de medida racional, a medida de seu lado é um número irracional (BEKKEN, 1994 *apud* POMMER, 2012).

O diálogo apresentado mostra um dos primeiros indícios da manipulação dos números irracionais pelos gregos, por meio de uma articulação entre a Aritmética e a Geometria, representando uma superação superficial da tensão que estes números causaram na época dos Pitagóricos com a descoberta da existência dos segmentos incomensuráveis.

Embora houvesse a manipulação de números irracionais por muitas civilizações e matemáticos, em especial pelos Pitagóricos e membros da Escola de Platão, somente em 1872, é que surgiu uma teoria mais completa e satisfatória sobre esses números, destituída de considerações geométricas, a partir da publicação de um ensaio "Continuidade e Números Irracionais" do matemático Richard Dedekind (1831-1916) (OLIVEIRA; GOMES, 2009).

CONSIDERAÇÕES

A forma como os conteúdos da matemática escolar são apresentados, muitas vezes deixam a impressão, aos iniciantes do assunto, que os conceitos matemáticos são elaborados de tal forma, que uma vez propostos não sofrem questionamento ou aperfeiçoamento.

Os resultados apresentados neste texto mostram que os números irracionais, só na Grécia antiga, tiveram um desenvolvimento histórico rico em abordagens e interpretações, que provocaram avanços e retrocessos naquela época para o assunto. Mas que foram insuficientes para permitir aos incomensuráveis a interpretação de número. Esta insuficiência foi superada com o trabalho de Dedekind, durante o movimento da aritmetização da análise no século XIX.

A história dos números irracionais possui outros momentos que valem a pena conhecer e servem para auxiliar o processo de ensino, aprendizagem e avaliação da matemática escolar.

Estes conhecimentos históricos dos conteúdos são importantes para o exercício da docência em matemática, principalmente na educação básica.

Os resultados aqui apresentados e outros se encontram na HQ: "O Museu dos Números Irracionais" em http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/602640. A referida HQ pode servir de recurso didático ao ensino de Números Irracionais.

REFERÊNCIAS

BOMGIOVANI, Cesar Augusto Oliveira et al. **Teoria das Proporções de Eudoxo e os Incomensuráveis**. 2018.

BROETTO, Geraldo. **O ensino de números irracionais para alunos ingressantes da licenciatura em matemática**. 2016. 588 f. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016.

CERRI, Cristina. **Desvendando os Números Reais**. 2006. Disponível em https://www.ime.ufg.br/bienal/2006/mini/cristina.cerri.pdf. Acesso em 02 de Jul. de 2021.

COSTA, Valderi Candido da. **Números Construtíveis**. 2013. 64 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande – PB, 2013.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas: Editora da UNICAMP. 2004.

GODEFROY, Gilles. **A Aventura dos Números**. Trad. Antônio Viegas. Lisboa - Portugal: Instituto Piaget, 1997.

LOPES, A. C. M.; SÁ, F. P. de. Números Reais: aspectos históricos. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 3, n. 9, p. 79-90, 2016.

LORENZONI, C. A. C. de A.; SAD, L. A. História da Matemática e o “Fazer Matemática” na Educação Básica. **Revista de História da Educação** Matemática, v.4, n.1, 2018.

LORIN; João Henrique; REZENDE, Veridiana. Os Alogon: uma história dos números irracionais. **Encontro Interdisciplinar de Educação**, [online], v.5, n.1, 2013.

MLODINOW, Leonard. **A Janela de Euclides:** a história da geometria das linhas paralelas ao hiperespaço. Trad. de Enésio E. de Almeida Filho. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

MOSCIBROSKI, Thais Meurer. **Amplitude do Conjunto dos Números Irracionais**. 2002. 71f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

OLIVEIRA, J. C.; GOMES, C. C. **Números Irracionais e Transcendentes**. 2009. 61 f. TCC (Professor Especialista em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina e Universidade Virtual do Maranhão, Imperatriz, 2009.

PLATÃO. **Diálogos:** Teeteto e Crátilo. Trad. do grego Carlos Alberto Nunes. Belém: Universidade Federal do Pará, 1988.

POMMER, W. M. **A construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico:** Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais. 2012. Tese (Doutorado em Educação) Programa de Pós-graduação em Educação) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, USP, São Paulo, 2012.

SANTOS, Tatiana de Souza Lima. **O Conceito de Infinito:** Uma Abordagem a Partir da Resolução de Problemas. 2015. 54 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.

Submetido em**:** 08 de março de 2021.

Aprovado em**:** 25 de abril de 2022.