RHMP
REVISTA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

ISSN: 2317-9546 ***e*-ISSN**: 2675-715X

INCRÍVEL HISTÓRIA DO NÚMERO π

Rafael Lameira Barros[1]
Pedro Franco de Sá[2]

RESUMO

O tema abordado neste artigo foi o π, que é um número irracional, o qual possui grande significância no campo da Matemática, por estar ligado à solução de vários problemas e por ser dotado de um conjunto grande de histórias ricas em detalhes. Diante disso, o objetivo adotado neste trabalho, foi mostrar alguns recortes da história do número π, quanto a sua concepção por civilizações antigas e por matemáticos, como também, quanto a sua formalização, com o intuito de conectar a História da Matemática com os assuntos de matemática ensinados em sala de aula. Este trabalho apresenta como resultado, um conjunto de informações sobre como alguns matemáticos/povos conceberam a ideia de π, bem como sobre de que modo se iniciou o processo de sua formalização referente à irracionalidade e transcendência de π. Essas informações serviram para o planejamento e construção de uma revista em História em Quadrinhos (HQ), que hoje se encontra publicada pelos autores deste artigo, em um dos capítulos de um livro digital da eduCAPES, sendo essa HQ um recurso muito importante para desenvolver o ensino de Números Irracionais na Educação Básica.
Palavras-chave: História da Matemática. Números Irracionais. Número π.

INTRODUÇÃO

Os Números Irracionais são números que dimensionam medidas, as quais não podem ser medidas com frações. A concepção matemática de número irracional é importante por compor a nossa compreensão numérica de forma mais completa, possibilitando um cálculo adequado aos moldes numéricos que a natureza e algumas situações matemáticas proporcionam em meio às grandezas contínuas.

Este artigo aborda um número irracional específico que possui grande significância no campo da Matemática, o π. Sem a existência desse número, bem como de outros irracionais, vários problemas não poderiam ser solucionados, os quais se apresentam em inúmeras situações, sendo este um dos motivos para que esse assunto esteja citado nos currículos do Ensino Básico (VASCONCELOS, 2016).

O objetivo deste trabalho foi mostrar alguns recortes da história do número π, quanto a sua concepção por civilizações antigas, por matemáticos, e também quanto a sua

[1] Docente na Escola Municipal de Educação Infantil e Ensino Fundamental Profª Terezinha Souza, Belém, Pará. Mestre em Ensino de Matemática pela UEPA. E-mail: rafael.lbarros@aluno.uepa.br
[2] Docente da Universidade do Estado do Pará, Belém, Pará. Doutor em Educação pela UFRN. E-mail: pedro.sa@uepa.br

formalização, com o intuito de conectar a História da Matemática com os assuntos da matemática ensinados em sala de aula.

O texto deste trabalho está organizado em duas seções. Na 1ª seção está apresentada a concepção de número π, conforme civilizações como a Babilônica, a Egípcia e a Chinesa além disso, conforme matemáticos como Arquimedes e Ptolomeu. Na 2ª seção é tratado sobre a irracionalidade e transcendência deste número, no qual se destacam os matemáticos Johann Heinrich Lambert (1728-1777) e Ferdinand von Lindemann (1852-1939) que fizeram contribuições substanciais para o processo de formalização quanto à irracionalidade e transcendência de π.

CONCEPÇÃO DE NÚMERO π

Um dos números mais famosos da história, o π, corresponde à razão entre o perímetro de um círculo e o seu diâmetro. Ele é um número irracional, cujo valor ajuda no cálculo, tanto do perímetro, quanto na área de círculos. As evidências sobre a utilização desse número indicam que a ideia de π já era usada a cerca de 4.000 anos atrás, sendo a relação constante entre a circunferência e o seu diâmetro percebida por muitas civilizações antigas (OLIVEIRA; GOMES, 2009).

Embora a ideia de π tenha sido usada durante a história por muitas civilizações, assim como por muitos matemáticos na modernidade, o motivo para a escolha da 16ª letra do alfabeto grego (π) para simbolizar o número irracional tratado, se inicia na antiguidade, onde o famoso matemático grego Arquimedes, no seu tratado *Da Medida do Círculo*, refere-se ao comprimento da circunferência pela palavra grega $\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$ que significava perímetro. Mais tarde, o uso do termo $\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$ para indicar o perímetro de um círculo de raio R, foi adotado de modo abreviado, para π, por alguns matemáticos como William Oughtred e Isaac Barrow (CARVALHO, 2011).

Em 1706, o matemático galês William Jones (1675-1749), publicou a obra *A New Introduction to Mathematics*, na qual usa a letra π, designando-a especificamente como a razão entre o perímetro do círculo e seu diâmetro, ao invés de simplesmente perímetro de um círculo. Entretanto, nem todos usavam essa mesma notação. Em 1737, este termo ganhou destaque a partir do seu uso por Leonhard Euler, em sua obra sobre séries infinitas, chamada *Variae observationes circa series infinitas* (CARVALHO, 2011).

A partir da distinção simbólica de π, é possível tratar agora de eventos históricos que evidenciam a manipulação de sua ideia.

Diante de várias medições, muitas civilizações e matemáticos da antiguidade notaram que a razão entre o perímetro de diferentes círculos e seus respectivos diâmetros eram sempre aproximações de um mesmo valor ou simplesmente desenvolviam cálculos que indicavam implicitamente uma aproximação para π. Veja no quadro seguinte a percepção de π para algumas referências matemáticas (civilizações e matemáticos) durante a história.

Quadro 1 – Algumas aproximações de π conforme evidências matemáticas de civilizações e matemáticos durante a história.

Origem/autor	Data	Valor
Babilônia	2000 a. C.	$3+\frac{1}{8}$
Egito (Papiro de Ahmes)	1650 a. C.	$\left(\frac{16}{9}\right)^2$
Arquimedes	250 a. C.	$\frac{22}{7}$
Ptolomeu	150 d. C.	$\frac{377}{120}$
China (Liu Hui)	ca. 220 d. C.	3,14159
China (Tsu Chung Chih)	480 d. C.	$\frac{355}{113}$

Fonte: Dellajustina e Martins (2014); Machado (2013); Tadeu et al (2018).

Pode-se perceber no quadro apresentado, que para cada um dos referenciais matemáticos há aproximações diferenciadas, algumas por excesso e outras por falta.

De acordo com Oliveira e Gomes (2009), embora houvesse evidência da concepção e/ou manipulação de muitas civilizações e matemáticos sobre o π, foram os gregos que conseguiram compreender, bem como, explicar o motivo da relação geométrica que o forma, a qual é inerente às propriedades de figuras semelhantes. Ademais, eles compreenderam que números como π e $\sqrt{2}$ são diferentes dos números inteiros, assim como dos números racionais utilizados na matemática deles e, mesmo eles tendo conseguido perceber a irracionalidade de $\sqrt{2}$, o mesmo não ocorreu para π.

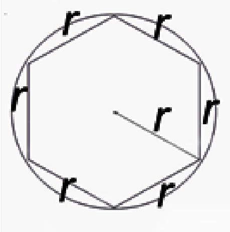
Apresentaremos nas próximas subseções a concepção de número π, conforme civilizações como a Babilônica, a Egípcia e a Chinesa e também, do mesmo modo, matemáticos como Arquimedes e Ptolomeu. Porém, de acordo com Machado (2013), é importante enfatizar que a história do π não ocorreu de maneira linear e contínua como pode indicar uma organização cronológica. O uso deste número ocorreu em diversas épocas, regiões do globo e povos distintos, em alguns casos de forma isolada e, em outros, apoiados em resultados anteriores, além de que em alguns momentos, sua ideia era utilizada sem estabelecer a noção de número. Diante disso, o desenvolvimento histórico a se apresentar nas subseções que seguem irá apresentar a história deste número, destituído algumas vezes de linearidade, mas enfatizando as principais figuras de destaque que conceberam a sua ideia.

▪ **Babilônios**

Considerando a civilização babilônica, existem evidências que direcionam a uma compreensão da essência do significado do π por esse povo. Uma dessas evidências foi uma tábua de barro encontrada em 1936 na cidade de Suza, no Iran. Essa tábua traz informações de que a razão entre o perímetro de um hexágono regular e o perímetro de uma circunferência circunscrita a ele era de 24/25 (MACHADO, 2013).

Consideremos a situação anterior, um hexágono e uma circunferência circunscrita nele. Sendo r o raio da circunferência, temos que o lado desse hexágono também é r.

Figura 1 – Hexágono inscrito em uma circunferência



Fonte: Machado (2013).

Assim, temos que a razão entre o perímetro do hexágono (6r) e o perímetro da circunferência (c) será de $\frac{6r}{c} = \frac{6r}{2\pi r} = \frac{3}{\pi}$. Com base nessa razão, podemos igualá-la a razão $\frac{24}{25}$, referida anteriormente, por se tratar da mesma ideia. Assim $\frac{3}{\pi} = \frac{24}{25}$, onde teremos que $\pi = 3{,}125$. Conclui-se, que o valor 3,125, de fato, é uma aproximação do número π, o qual se encontra implícito nas informações da tábua de barro. Isto mostra um pequeno indício da concepção que os babilônicos tinham de π (MACHADO, 2013). Contudo, de acordo com Carvalho (2011), existem evidências de que o método usado por eles para calcular a área do círculo era multiplicar 3 ao quadrado do raio. Neste caso, eles consideraram π valendo 3.

▪ **Egípcios**

Os Egípcios na antiguidade armazenavam alimentos em celeiros cilíndricos. Como a base de um cilindro circular reto é um círculo, então conhecer um método o qual permitisse determinar a área do círculo era uma necessidade prática. Esta situação prática representou uma das ocasiões que utilizava, mesmo que implicitamente, o número π (GASPAR; MAURO, 2004).

No Papiro de Rhind que foi escrito pelo escriba Ahmes, por volta de 1700 a.C, foi encontrado os seguintes problemas: 1-*Compare a área do círculo com a do quadrado circunscrito*. 2-*Exemplo de um corpo redondo de diâmetro 9. Qual é a área?*

Esses problemas trataram a necessidade de encontrar uma forma de calcular a área de um círculo. No mesmo documento, é apresentada a seguinte solução: a área de um círculo é igual a de um quadrado cujo lado (d) é o diâmetro $(2r)$ do círculo, subtraindo-se sua nona parte (MACHADO, 2013). Ou também: Subtraia do diâmetro sua nona parte e eleve o restante ao quadrado. Esta é sua área. (GASPAR; MAURO, 2004).

Em outras palavras o escriba usava a fórmula $A = (d - \frac{d}{9})^2$, onde A é área e d é o diâmetro do círculo. Sendo que ela pode ser escrita como $A = (\frac{8d}{9})^2$, $A = \frac{64d^2}{81}$ ou $A = \left(\frac{16}{9}\right)^2 . r^2$ (com r sendo o raio). Neste último caso, pode-se comparar com a fórmula atual de cálculo de área de círculo, $A = \pi . r^2$, assim, percebe-se, pela similaridade, que há entre $A = \left(\frac{16}{9}\right)^2 . r^2$ e $A = \pi . r^2$, o valor de π pela fórmula apresentada no Papiro de Rhind, sendo indicado como aproximadamente 3,160493 (MACHADO, 2013).

- **Chineses**

Na China antiga também houve o surgimento da concepção de π. O copiador de livros Liu Hui (c. 250 d.C.), oficial do reino de Wei (220-265), foi chamado a reexaminar a literatura científica clássica e coube-lhe interpretar, assim como, reescrever a obra “Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática” que era um conjunto de conhecimentos da matemática chinesa. Esta obra é conhecida atualmente como algo equivalente à obra Elementos escrita por Euclides (PEREIRA, 2017).

Foi nesta obra, que Liu Hui forneceu uma aproximação para π baseada no seguinte entendimento: se escrever um polígono de n lados, com n o maior número possível de lados, dentro de um círculo, então a área do círculo é igual à área do polígono. Assim, Hui conseguiu determinar ao π uma aproximação de 3,14159.

Outro chinês que se destacou por apresentar outra aproximação para π, foi Tsu Ch'ung-chih. No final do século V, este matemático chegou a um valor ainda mais próximo, sendo obtido pela razão 355/13, (GRILLI, et al. 2011).

▪ **Arquimedes**

Existiu um matemático na cidade de Siracusa, na região da Itália, chamado Arquimedes (287 - 212 a.c.). Arquimedes era matemático, físico, engenheiro, inventor e astrônomo. Ele também tratou de maneira bastante adequada o significado de π, por meio de aproximações (DELLAJUSTINA; MARTINS, 2014). Arquimedes criou um método geométrico que o direcionou a determinar valores aproximados a π de uma maneira incrível. Tem-se a seguir uma descrição sobre este método.

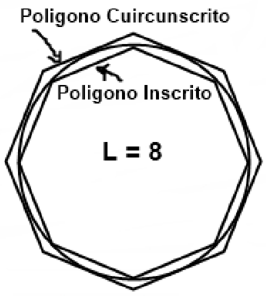
Imaginemos uma circunferência e dois polígonos regulares de 4 lados (L = 4), um inscrito e outro circunscrito a essa circunferência (Figura 2). Observa-se que as figuras mostram que o perímetro do polígono circunscrito (P_c) é maior que o perímetro da circunferência (C), e esta é maior que o perímetro do polígono inscrito (P_i).

Figura 2 – Passo 1 do método de Arquimedes

Fonte: Dellajustina e Martins (2014).

Aumentando para o dobro do número de lados (L = 8), para os polígonos inscrito e circunscrito teremos a figura seguinte.

Figura 3 – Passo 2 do método de Arquimedes



Fonte: Dellajustina e Martins (2014).

Neste caso, ainda é verdadeira a relação $P_i < C < P_c$ a respeito dos perímetros das figuras geométricas. Mas, com uma diferença, os perímetros dos polígonos se aproximaram do perímetro da circunferência. Desse modo, se continuar a dobrar o número de lados, essa aproximação vai ser ainda maior. Assim, a relação que resulta no π (razão da medida do perímetro da circunferência pela medida de seu diâmetro) aplicado nos polígonos, de modo semelhante vai determinar aproximações para π. No polígono circunscrito, surgem aproximações por excesso e no polígono inscrito, surgem aproximações por falta.

Arquimedes repetiu o processo descrito, com polígonos de até 96 lados, até perceber que π está entre 3,140 e 3,143 (DELLAJUSTINA; MARTINS, 2014).

O método apresentado ganhou grande destaque, sendo conhecido como "método clássico para o cálculo do número π". O grande reconhecimento por esse trabalho de Arquimedes está no fato dele não tentar apresentar o valor exato de π, mas somente um limite inferior e um limite superior para este número. Algo que nos dias atuais pode-se comparar com a ideia de limite pela esquerda e limite pela direita (MACHADO, 2013).

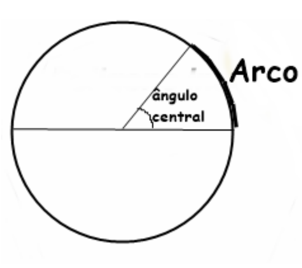
- **Ptolomeu**

Claudio Ptolomeu (85 - 165 d.C.) foi um cientista astrônomo e geógrafo grego que viveu em Alexandria. Ele escreveu uma obra chamada Almagesto, considerada uma das mais importantes obras sobre a Trigonometria da antiguidade (OLIVEIRA, 2010).

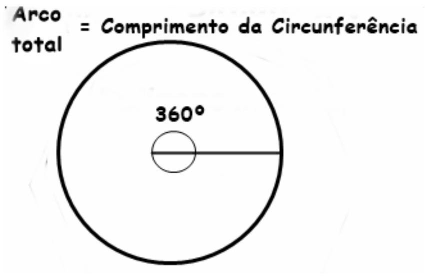
Para Eves (1997 apud MACHADO, 2013), em um dos livros de obra Almagesto, Ptolomeu fez uma aproximação para π. O valor foi obtido a partir de uma tábua de arcos de uma circunferência, correspondentes aos ângulos centrais. Uma explicação do caminho feito por Ptolomeu para determinar uma aproximação para π é: Consideremos um arco determinado por um ângulo central (figura 4-A).

Figura 4 –Arco de um ângulo central

(A) – Arco de um ângulo central



(B) – Arco de um ângulo de 360°



Fonte: Autor (2021).

Logo, podemos determinar o arco de um ângulo central de 360°, assim como se apresenta na figura 4-B.

A partir dessa ideia, Ptolomeu dividiu o comprimento total do arco formado, pelo diâmetro da própria circunferência, obtendo $\frac{377}{120}$. Essa fração foi encontrada porque ele dividiu a corda em 360 partes, o diâmetro em 120 partes e utilizou 377/120 como uma aproximação para o π, que nesse caso é aproximadamente 3,1416 (OLIVEIRA, J., 2010).

IRRACIONALIDADE E TRANSCENDÊNCIA DE π

Johann Heinrich Lambert (1728-1777) foi um matemático francês, que provou, em 1761, que π é irracional. Ele chegou a essa conclusão a partir de alguns estudos sobre fração contínua (LUBECK K.; LUBECK M., 2010).

Nos estudos de Lambert, ele obtém uma expansão para a função tangente por frações contínuas e, a partir dessa compreensão, ele consegue provar que se um arco x tivesse medida racional então a tangente desse arco (Tg x) teria valor irracional, assim caso a tangente de um arco x fosse racional então a medida desse arco será irracional (OLIVEIRA, F. N., 2018). Assim teremos o seguinte: Como $Tg\ (\frac{\pi}{4})$ = 1 é número racional então o arco $\frac{\pi}{4}$ é irracional. Portanto percebe-se que π é irracional. Sendo esse resultado demonstrado por Lamber.

Após a prova matemática apresentada por Lambert, surgiram muitas outras demonstrações sobre a irracionalidade de π. Mas apesar de ter sido demonstrado pela primeira vez em 1761, o π ainda guardava um problema ainda não solucionado, o problema da "Quadratura do Círculo", que teve origem na geometria da Grécia antiga. O problema da Quadratura do Círculo pode ser enunciado em linguagem atual da seguinte forma:

Construir um quadrado de área, igual à área de um círculo de raio r, utilizando apenas uma régua sem escala e um compasso. Seja um círculo de raio r, sua área é dada por $\pi\, r^2$. Vamos considerar um círculo de raio unitário, ou seja, $r = 1$. Então a área deste círculo será igual a $\pi\,.1^2$ = π. Desse modo, se a área de um quadrado de lado l for igual a de um círculo de raio unitário, devemos ter l^2 = π, portanto tem-se $l = \sqrt{\pi}$ (VENDEMIATTI, 2009).

Embora fosse impossível achar uma solução para este problema, o qual utilize régua e compasso, muitos matemáticos, durante a história, tentaram encontrar uma possível solução para ele, porém, conforme Vendemiatti (2009) a resolução desse problema, que tratou da prova de sua impossibilidade, precisou ir muito além da régua, do compasso e das concepções geométricas da Grécia antiga.

A dificuldade para resolver a questão da quadratura do círculo está na natureza do número π que, além de ser irracional, não é algébrico, ou seja, não pode ser raiz de uma equação polinomial. Este entendimento foi demonstrado em 1882 por Ferdinand von Lindemann (1852-1939), em um artigo publicado na Mathemastsche Annalen de Munique. O artigo mostrava que π é também um número não algébrico, o que significa que é transcendente (MACHADO, 2013). Para isso, ele considerou dois fatos já demonstrados, o de que o número irracional e é transcendente e que $e^{i\pi}$ + 1 = 0 (Identidade de Euler) (LUBECK K.; LUBECK M., 2010).

Lindemann usou o seguinte raciocínio: $e^{i\pi}$ é algébrico, pois -1, obviamente, o é, já que $e^{i\pi}$ + 1 = 0 e, com isso, $e^{i\pi}$ = -1. Portanto, $i\pi$ só pode ser transcendente, pois e elevado a um número algébrico continuaria a ser transcendente. Se $i\pi$ é transcendente, sendo i algébrico, por ser solução da equação $x^2 + 1 = 0$, então π só pode ser transcendente (GARBI, 1997).

O impacto da demonstração de Lindemann foi muito importante, pois provava que o clássico problema da quadratura do círculo não tem solução, mas se fosse possível, $\sqrt{\pi}$ seria um número algébrico e, diante isso, π também seria algébrico, o que é uma contradição (LUBECK K.; LUBECK M., 2010). Por conseguinte, a área πr^2 de um círculo não pode ser redefinida para a área de um quadrado, utilizando régua e compasso.

CONSIDERAÇÕES

Este artigo abordou, como tema, o π que é um número irracional, o qual possui grande significância no campo da Matemática. Sendo ele de grande contribuição para a solução de vários problemas e dotado de um conjunto grande de histórias ricas em detalhes. Diante disso, o objetivo adotado neste trabalho, foi mostrar alguns recortes da história do número π, quanto a sua concepção por civilizações antigas e matemáticos, bem como, quanto a sua formalização, com o intuito de conectar a História da Matemática com os assuntos da matemática ensinados em sala de aula.

Além disso, este trabalho apresentou muitos detalhes e situações históricas sobre como alguns matemáticos/povos conceberam a ideia de π. Quanto à civilização Babilônica, notou-se a ideia de π foi apresentada de forma implícita a partir do estudo da aproximação da razão entre o perímetro de um hexágono regular e o perímetro de uma circunferência circunscrita.

Quanto à civilização Egípcia, vê-se a ideia de π também implícita, mas a partir de evidências da busca em determinar a área do círculo.

Quanto à civilização Chinesa, tem-se o reconhecimento dos estudos de Liu Hui (c. 250 d.C.), que determinou uma aproximação para π, ao tentar aproximar a área de polígonos com grande número de lados em relação à área do círculo, aproximando com isso o valor dos perímetros.

Quanto ao matemático Arquimedes, notou-se que o mesmo aproximou as medidas dos perímetros de polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência, a partir do aumento do número de lados, possibilitando com isso o alcance de uma aproximação em excesso e outra por falta do perímetro da circunferência, e por consequência chegou a uma aproximação de π.

Quanto ao matemático Ptolomeu, foi tratada a ideia de π como valor obtido a partir da razão da medida do comprimento total do arco de uma circunferência, com a medida do próprio diâmetro, assim, conseguiu chegar a uma aproximação para π.

Outro importante contexto de estudo do π, foi seu processo de formalização no que se refere à irracionalidade e transcendência. Conforme foi abordado no trabalho, dois matemáticos se destacaram no estudo desses assuntos. Johann Heinrich Lambert (1728-1777), com a prova da irracionalidade de π e Ferdinand von Lindemann (1852-1939), com a prova da sua transcendência, sendo este resultado muito importante para se concluir que o problema clássico da quadratura do círculo não tem solução.

Os resultados obtidos neste trabalho serviram para o planejamento e construção de uma revista em História em Quadrinhos, a qual, hoje se encontra publicada na eduCAPES pelos autores deste artigo, em um dos capítulos de um livro digital "O Museu dos Números Irracionais", disponível no link http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/602640, sendo essa HQ, um recurso metodológico que pode ajudar professores a desenvolverem o ensino de Números Irracionais na Educação Básica, que seja pautada na História dos Números Irracionais, além de uma importante fonte de conhecimento para leitores que se interessem sobre o assunto.

Diante disso, espera-se que este artigo possa servir como fonte de pesquisa de professores e alunos que se interessem em conhecer este tema, como também um meio para que os professores de matemática desenvolvam seu planejamento de ensino sobre o número π, assim como, sobre os Números Irracionais a partir da História da Matemática.

REFERÊNCIAS

CARVALHO, Sônia Pinto de. A área e o perímetro de um círculo. **1º Colóquio de Matemática da Região Sudeste**. Minas Gerais, 2011.

DELLAJUSTINA, F. J.; MARTINS, L. C. Poderia Arquimedes ter calculado π com areia e um bastão? **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 36, n. 3, Joinville-SC, 2014.

GARBI, G. G. **O Romance das Equações Algébricas**. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2ª edição, 2007.

GASPAR, Maria Terezinha; MAURO, Suzeli. Explorando a Geometria Através da História da Matemática e da Etnomatemática. **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**. Recife, 2004.

GRILLI, Alexandre; *et al*. **ROTEIRO:** Determinando o Número π. 2011. Disponível em: http://www.gradadm.ifsc.usp.br/dados/20112/SLC0596-1/Pi%20Roteiro%20Pi.pdf. Acesso em: 20 de abr. de 2020.

LOPES, A. C. M.; SÁ, F. P. de. Números Reais: aspectos históricos. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 3, n. 9, p. 79-90, 2016. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/56/46. Acesso em: 24 de abr. de 2020.

LUBECK, K. R. M.; LUBECK, M. L. Tópicos Sobre o "Pi" e os Números Reais. **V Bienal da SBM**, 2010.

MACHADO, Djeison. **Propostas Didáticas para o Ensino do Número $\boldsymbol{\pi}$**. 2013. 66f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

OLIVEIRA, Fernando Neres de. Uma prova elementar da irracionalidade de π. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, n.13, [online], 2018.

OLIVEIRA, Jaqueline. **Tópicos Selecionados de Trigonometria e sua História**. 2010. 68 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2010. Disponível em https://www.dm.ufscar.br/graduacao/attachments/article/156/313530.pdf. Acesso em 03 de Jul. de 2021.

OLIVEIRA, J. C.; GOMES, C. C. **Números Irracionais e Transcendentes**. 2009. 61 f. TCC (Professor Especialista em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina e Universidade Virtual do Maranhão, Imperatriz, 2009.

PEREIRA, Arminda Manuela Queimado. **Equações Algébricas:** alguns episódios históricos. 2017. 93 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores) – Faculdade de Ciências e Matemática. Universidade de Lisboa. Lisboa (Portugal), 2017. Disponível em https://repositorio.ul.pt/handle/10451/30373. Acesso em 03 de Jul. de 2021.

TADEU, E. V. C. et al. Determinação do número pi (π) por meio de uma rede quadrada de resistores idênticos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 40, nº 2, [ONLINE], 2018.

VASCONCELOS, Daniel Victor Menezes de. **Números Irracionais:** uma abordagem para o ensino básico. 2016. 42 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais, 2016.

VENDEMIATTI, Aloísio Daniel. **A Quadratura do Círculo e a Gênese do Número** π. 2009. 145 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.

***Submetido em*:** 16 de agosto de 2021.

***Aprovado em*:** 25 de abril de 2022.