RHMP
REVISTA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

ISSN: 2317-9546 ***e*-ISSN**: 2675-715X

IMPLICAÇÕES PEDAGÓGICAS NA INVESTIGAÇÃO HISTÓRICA DO ESTUDO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS, UMA DISCUSSÃO SOBRE TRIÂNGULOS

Anna Karla Silva do Nascimento[1]
Giselle Costa de Sousa[2]

RESUMO

O presente artigo tem como objetivo descrever como foram realizadas algumas atividades de um Produto Educacional no ambiente da escola campo da pesquisa de mestrado profissional que almejou apresentar as Geometrias não euclidianas enquanto anomalias, tomando como referencial as geometrias euclidianas, indicando algumas implicações pedagógicas do uso da História da Matemática (HM) na sala de aula realizadas por meio de uma sequência de atividades que compõe tal investigação e que se ancora em um estudo histórico-matemático sobre o tema. Numa abordagem metodológica qualitativa foi utilizada a investigação para a discussão do tema à vista do contexto histórico a partir de algumas atividades as quais discutem, por exemplo, acerca dos triângulos em diferentes geometrias e, portanto, com observações que geram reflexões acerca da aprendizagem em Matemática. Desse modo, concluímos que, sendo planejadas para professores e estudantes do curso de licenciatura em Matemática, revelam resultados relativos à opção de uso da HM na sala de aula, sobretudo, relativas a estudos geométricos e discussão sobre triângulos.

Palavras-chave: Geometrias não euclidianas. Formação de professores. Investigação histórica. Uso da HM na sala de aula.

INTRODUÇÃO

Este trabalho trata de estudo histórico acerca das geometrias não-euclidianas enquanto anomalias vislumbrando possiblidades didáticas de sua abordagem na sala de aula ancorada em pesquisas como de Barnett (2000) que apresentou uma investigação no que concerne a existência de anomalias na Matemática, dentre as quais tem-se as geometrias não euclidianas creditando a relevância de uma apreciação do que seja anomalia juntamente com algumas discussões e caracterização em relação ao processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

Para Kuhn (2009, p.78), anomalia "é o reconhecimento de que, de alguma maneira, a natureza violou as expectativas paradigmáticas que governam a ciência normal[3] " e acrescenta que "[...] depois que elas se incorporam à ciência, o empreendimento científico nunca mais é o

[1] Docente – Universidade Federal do Cariri (UFCA), Brejo Santo, Ceará. Mestra em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (UFRN). E-mail: karla.nascimento@ufca.edu.br.
[2] Docente Adjunta – Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Natal, Rio Grande do Norte. Doutora em Educação (UFRN). E-mail: giselle.sousa@ufrn.br.
[3]Ciência normal, segundo Kuhn (2009, p. 29) é "a pesquisa firmemente baseada em uma ou mais realizações científicas passadas. Essas realizações são reconhecidas durante algum tempo por alguma comunidade científica específica como proporcionando os fundamentos para sua prática posterior".

mesmo [...]". Assim, a anomalia é tida como uma quebra de paradigmas[4] pelo fato de ser algo que é fora do padrão. Logo, tem-se que uma nova ideia surge conflitando com o conhecimento anterior.

Barnett (2000), em seu trabalho intitulado *Anomalies and Development of Mathematical understanding,* discorre sobre o processo de aceitação do indivíduo para novas intuições, afirmando que esse processo pode ser demorado, contudo, ressalta ainda que usando a história como recurso pedagógico, ele pode se transformar em um agente motivador e se tornar um grande auxiliador para o sucesso da aprendizagem do assunto. Para a autora, uma anomalia surge quando há conflitos de intuições pré-estabelecidas, e assim serve ao ensino à medida que o conflito cognitivo é gerado e a anomalia aparece como um elemento provocador de conhecimento do aluno. Propomos um parâmetro de definição para anomalias como sendo: um paradigma[5] que surge para ser quebrado, questionando – para certos referenciais – as definições antes tidas como verdades absolutas, mostrando irregularidades, não negando, mas ampliando e fazendo com que se observe o desvio acentuado do que até o momento tínhamos como padrão normal, uma vez que, eram questões em abertos que ao serem solucionadas, estendem/alteraram o conceito já existente, mediante conflito cognitivo interno ao indivíduo.

Perante o exposto, surge a indagação: quais seriam implicações pedagógicas voltadas ao estudo histórico da geometria não euclidiana como anomalia na sala de aula?

Assim, o intuito deste estudo é apresentar a geometria não euclidiana como anomalia a fim de indicar suas implicações pedagógicas e expor uma sequência de atividades, para explicitar as diferentes características da geometria euclidiana e da não euclidiana, de modo a suscitar uma visão mais ampla de conceitos geométricos.

Para tal abordagem, exibe-se a geometria não euclidiana como anomalia, seguindo seu desenvolvimento histórico desde os questionamentos sobre a veracidade do Postulado das Paralelas com Euclides (325 a.C – 265 a.C.), passando por Lambert (1728 - 1777), Saccheri (1667 - 1733), dentre outros, até os formuladores dessa geometria, ou seja, Bolyai (1802 - 1860), Lobachevsky (1792 - 1856) e Gauss (1777 - 1855). Em seguida, abordamos algumas implicações pedagógicas que foram expostas no decorrer do produto gerado pelo estudo histórico. Tal material surge como sugestão deste artigo de uso da HM na sala de aula de modo que produzimos um produto educacional com uma sequência didática com atividades divididas em três blocos, o primeiro discute o paralelismo de retas em espaços distintos, o segundo bloco, sobre o triângulo no espaço euclidiano, hiperbólico e esférico para que sejam capazes de definir

[4]. Consideramos quebra de paradigmas como sendo violação do que era tido como verdade absoluta.
[5] Algo que segue um padrão ou um modelo.

triângulos e caracterizá-los, somando seus ângulos internos concluindo, assim, essas somas e consigam diferenciar a imagem do triângulo em espaços distintos e o terceiro bloco trata sobre a menor distância entre dois pontos. Esse material encontra-se na íntegra em (NASCIMENTO, 2013). Nos limitamos aqui a apresentar parte dele juntamente com elementos da história que o geraram conforme segue.

GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS E IMPLICAÇÕES PEDAGÓGICAS

Na Antiguidade, volta do século IV a.C. a obra *Os Elementos,* sistematizada por Euclides (325 a.C – 265 a.C.), reuniu muitas das contribuições matemáticas para humanidade, incluindo conhecimentos da cultura grega e antiga em geral. De fato, Euclides (2009, p.16) coloca que "a história de *Os Elementos* se confunde, em larga escala, com a história da matemática grega" contendo arcabouço de conhecimentos, em sua maioria, podemos identificar como geométricos numa abordagem axiomática hoje nomeada por geometria euclidiana.

No livro I de *Os Elementos,* Euclides apresentou cinco postulados, dos quais os quatro primeiros não geraram conflitos, uma vez que era de aceitável em seu contexto, mas o quinto era analisado com cautela por seus contemporâneos, visto que não aparentava simples evidência como os outros. Observe a seguir o quinto postulado conforme Euclides (2009, p. 98):

> 5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Pensadores davam por certo que se tratava de uma proposição ao invés de um axioma, porém não obtiveram êxito nas tentativas de demonstração.O quadro 1 que segue, aponta alguns estudiosos que trilharam este caminho.

Quadro 1 – Pensadores e tentativas de demonstração

Estudioso	**Período**	**Tentativa de demonstração**
Ptolomeu (85 – 165)	Sec. II	Tentou demonstrá-lo baseado nos outros axiomas da própria obra de Euclides.
Girolamo Saccheri (1667 – 1733)	Séc. XVII	Método identificado como redução ao absurdo.
Joahnn Lambert (1728 – 1777)	Sec. XVIII	Método identificado como redução ao absurdo.

Fonte: elaborada pelas autoras com recurso de software de editor de texto

Mudando o percurso e trilhando novo caminho, três matemáticos, Bolyai (1802 -1860), Lobachevsky (1793-1856) e Gauss (1777-1855) estudaram o problema tentando mostrar que se tratava de uma geometria independente da sistematizada por Euclides, na Antiguidade. O caso partircular, investigado pelos três se refere a geometria hiperbólica, de modo que o desenrolar da geometria não euclidiana coincide com o surgimento dessas investigações.

A primeira publicação sobre a geometria hiperbólica é atribuída a Nicolai Lobachevsky, no ano de 1929, um matemático russo. Boyer (1974, p.396) afirma que Lobachevsky foi "o homem que revolucionou o assunto [geometria euclidiana] pela criação de todo um ramo novo [o da geometria não euclidiana]". Três anos mais tarde, Janos Bolyai, também publicou sobre a geometria hiperbólica, aceitando a hipótese da veracidade do 5º postulado e, também, negando sua unicidade. Bolyai considerava estar diante de um "universo novo e estranho", como relata Eves (2004, p.542). O desenvolvimento da geometria hiperbólica também foi atribuído a Gauss, pois no período em que Bolyai verificou que suas ponderações eram demonstráveis e verdadeiras, Gauss foi procurado para ficar ciente do acontecimento e naquele momento, também apresentou os cálculos que provavam a existência daquela geometria.

Para Nascimento (2013), as geometrias não euclidianas solucionaram a dúvida que se alastrou durante séculos sobre o postulado das paralelas, pois mostrou sua independência em relação aos outros quatro, respondeu o questionamento que havia acerca do axioma ou da proposição, além de extinguir a ideia de que existia apenas a geometria plana, libertando-a para que desenvolvessem outras que contribuíram para o desenvolvimento científico.

Na geometria hiperbólica assumem-se todos os axiomas da geometria euclidiana, mas substitui o postulado das paralelas pelo axioma hiperbólico que é a negação de sua unicidade. Tomando Nascimento (2013, p. 49) como referência, algumas características da geometria hiperbólica, são:

- Num triângulo hiperbólico, temos que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo qualquer é menor que 180^0;
- Representada por uma superfície com curvatura negativa;
- Por um ponto P podem passar infinitas retas paralelas a outra reta. (NASCIMENTO, 2013, p. 49).

Como podemos observar, a geometria hiperbólica está em uma superfície distinta da euclidiana, e com isto, possui características distintas, no que tange a soma dos ângulos internos de um triângulo e a infinidade de retas paralelas que podem passar por dois pontos distintos, por causa da curvatura negativa, isso por exemplo, sinaliza uma potencialidade didática a ser explorada em atividades.

Já os primeiros registros da geometria elíptica, um outro caso de geometria não euclidiana, ocorrem em 1851 em estudos de Riemann (1826 - 1866), um matemático alemão que contribuiu à geometria e à análise. Algumas características da geometria elíptica são:

- A soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que dois retos;
- O plano é uma superfície esférica, e a reta uma geodésica, ou circunferência do círculo máximo;
- Duas retas distintas perpendiculares a uma terceira se interceptam;
- Uma reta não é dividida em duas por um ponto;
- A área de um triângulo é proporcional ao excesso da soma dos seus ângulos;
- Dois triângulos com ângulos correspondentes iguais são congruentes.

Diante das evidências desses casos de geometrias não euclidianas, ficou inviabilizada a tentativa de generalizar que o postulado das Paralelas serve para todos os espaços e a partir daquele momento, não podia ser usado para todos os referenciais possíveis. Desse modo, desfez-se a narrativa que a geometria, euclidiana era a única possível, de modo que a aceitação das demais implicam em reformular os conceitos canonicamente postos no plano em outros espaços e expandir compreensão de conceitos, para além da forma inclusive. De fato, figuras como triângulos, em geometrias diferentes que a euclidiana, aparecem "deformados", mas mantem-se fiéis as definições gerais. Assim, há justificativa de atribuição destes conceitos como anomalias, visto que, segundo define Kuhn (2009), gerou um forte conflito, cujos pesquisadores tentavam descobrir a qualquer custo o erro que havia no postulado, mas quando aceitaram que ele era verdadeiro, verificou que a partir dele podiam observar que existia outra geometria tão consistente quanto outra.

Diante do exposto, consideramos que há implicações pedagógicas para serem exploradas em sala de aula e que contribuem para o ensino de Matemática, dessa forma, construímos atividades investigativas que identificam a anomalia existente na geometria não euclidiana, quando se trata da euclidiana como referência, com o intuito de ampliarmos e/ou melhor definirmos conceitos como de triângulos (por exemplo, cuja soma dos ângulos internos diverge nos diferentes espaços). O caminho para tratar tais implicações passa por abordagem da HM na sala de aula visto que, de acordo com Barnett (2000), o uso das anomalias na sala de aula pode definir questões relevantes do estudo, mas, para isso, a história possui um papel importante para que obtenha sucesso durante o processo de aprendizagem utilizando a anomalia. Assim, a história deve ser utilizada como um guia, já que o processo de preparação do indivíduo para aceitar novas intuições é demorado, e o seu uso pode tornar-se um facilitador desse processo intuitivo.

Para o processo pedagógico, decidimos utilizar a investigação matemática em sala de aula como recurso metodológico, pois para Ponte; Brocardo e Oliveira (2009, p.13) "investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades”. Para os autores, a investigação propicia que o aluno desenvolva a curiosidade fazendo com que busque interesse sobre o tema matemático a ser investigado.

Segundo Mendes (2009) o uso da investigação histórica na sala de aula é um fator determinante para a prática na Educação Matemática. Seu uso colabora com o desenvolvimento da cognição do aluno fazendo com que tenha capacidade de indagar e questionar os casos estudados.

> Abordar o ensino de Matemática por meio de investigação histórica desponta como uma contribuição decisiva para o exercício de uma prática reflexiva em Educação Matemática. Esse empreendimento didático contribui para o estudante desenvolver competências e habilidades de construção autônoma da sua aprendizagem e exercitar a disciplina investigatória de compreensão sólida do desenvolvimento epistemológico da Matemática, de suas diversas formas de representação em todos os tempos e de suas conexões com outras áreas do conhecimento (MENDES, 2009, p.115).

Concordamos com o autor no que se refere que a investigação matemática coopera com as competências e habilidades da aprendizagem matemática e exercita a capacidade investigativa favorecendo o processo construtivo do aprendizado cooperando para o próprio progresso da Matemática.

Na seção seguinte, explicitaremos as atividades e como foram desenvolvidas.

DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES: POSSIBILIDADE DE USO DA HM NA SALA DE AULA

As atividades foram desenvolvidas para o ensino da geometria identificando as anomalias existentes na Matemática via HM, tratando exclusivamente das geometrias não euclidianas, tomando a euclidiana como referência. Dessa maneira dividimos em blocos para elaborar o produto educacional da pesquisa (NASCIMENTO, 2013) mostrando na sequência de atividades as diferenças e quão amplo é o conceito de geometria e suas entidades.

O público-alvo são professores e/ou futuros professores de Matemática de qualquer nível de ensino. As atividades executadas foram aplicadas em dois momentos: primeiramente, deu-se em um minicurso piloto com dez bolsistas do PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência) de Matemática e um aluno do PPGECNM, ambos os grupos da UFRN, posteriormente, um segundo momento, denominado de experimento, foi aplicado com 23 alunos de duas turmas da disciplina de Didática da Matemática[6] da UFRN que explanaremos

[6] Em 2013, a disciplina era ofertada no 5º período de curso, com uma carga horária de 90 horas e tem como pré-requisito a disciplina de Desenho Geométrico e Geometria Euclidiana II.

mais à frente. Neste trabalho, tratamos sobre o bloco de atividades sobre triângulos, porém as demais estão explicitadas detalhadamente na dissertação de Nascimento (2013).

Os materiais utilizados como recurso pedagógico para realização das atividades eram entregues em um kit contendo lápis grafite, borracha, transferidor (de plástico acetato), papel sulfite e compasso. Para analisar os espaços distintos das diferentes geometrias tratadas nas atividades, usou-se papel sulfite, para representar a geometria euclidiana, uma esfera de isopor para idealizar a geometria esférica e uma *sela* feita de biscuit, para simular a geometria hiperbólica, como mostra a figura 2.

Figura 2 – Kit entregue aos alunos

Fonte: (O autor)

O material para molde desta *sela* foi elaborado em uma olaria na cidade de Monte Alegre, no Rio Grande do Norte e as esferas foram adquiridas em uma loja de artigos de festa.

O bloco de atividades foi desenvolvido com base na investigação matemática, pois permite que seus objetivos possuam mais clareza na hora da execução, proporcionando ao aluno assumir o papel de investigador, pesquisador ao aplicar os procedimentos sugeridos, de modo que compreenda tal ato, mediante a identificação das anomalias aos participantes firmadas nas definições e esclarecimentos de Barnet (2000) e suas concepções euclidianas, mas além disso, que migrem deste nível de identificação de anomalias e ampliem seu referencial para não-euclidianos, sendo o aluno um construtor de seu conhecimento fazendo com que ampliem a definição dos elementos geométricos e, consequentemente, o conhecimento entre eles desprendido, necessariamente, da imagem.

De fato, no desenvolvimento das atividades, durante a aplicação, foi possível notar que, com identificação da anomalia provoca, algumas vezes, em deformações (visuais) das figuras obtidas, mas o conceito permanece o mesmo, mudando apenas o referencial. Por exemplo, o triângulo é um polígono convexo com três ângulos e três lados, tendo na geometria euclidiana a soma de seus ângulos internos é 180°, entretanto, se for mudada a geometria, verifica-se que a soma de seus ângulos internos não continuará sendo a mesma, essa deformação ocorrida pela divergência de valores na soma desses ângulos internos se dá por causa da mudança de geometria, por exemplo, pode ser menor ou maior que 180º, geometria hiperbólica e esférica, respectivamente.

Dentro do conjunto de atividades, aplicamos o bloco sobre triângulos no terceiro encontro, realizado no dia 13 de março de 2013. Neste dia, compareceram quatro alunos pela manhã e quinze à tarde e as atividades também foram feitas de forma individual. O bloco tratou sobre construção dos triângulos em espaços distintos: o euclidiano, o esférico e hiperbólico. Nas três primeiras atividades foram construídos triângulos nos espaços citados anteriormente para que fosse verificado que, mesmo sendo construídos em geometrias diferentes, continuavam sendo triângulos, pois se tratava sempre de um polígono convexo com três ângulos e três lados (forma não mantida, deformação, anomalia, mas conceito fica e é ampliado para diferentes espaços).

Na atividade quatro, foi feita a verificação da soma dos ângulos internos destes triângulos, para saber se essa soma sempre é 180° nos três espaços. A última atividade deste bloco analisou as anomalias das atividades anteriores, se existiu algum conflito cognitivo que, de alguma forma, impediu o aluno a chegar ao resultado desejado pelas pesquisadoras. Portanto, seu objetivo foi conduzir o participante a definição geral de triângulo independente da geometria e, consequentemente, a ampliação do conceito e das propriedades (soma dos ângulos internos) do triângulo, desprendida, necessariamente, da imagem, pois geram figuras distintas.

Para as investigações nas três primeiras atividades deste bloco, tomamos os conhecimentos da HM sobre o assunto e pedimos que os alunos marcassem três pontos não colineares no plano (representado por uma folha de papel sulfite), na esfera (representada por uma bola de isopor) e no espaço hiperbólico (representado pela sela de biscuit). Após isso, que ligassem esses pontos. Perguntamos que figura formou e responderam sem qualquer hesitação que se tratava de um triângulo nos três casos.

Na quarta atividade desse bloco, há uma tabela na qual solicitamos para que fossem medidos os ângulos internos desses triângulos e depois somadas às medidas dos ângulos de cada triângulo. Quando começaram a coletar estes dados, somando esses ângulos internos, os alunos chegaram à conclusão que a soma dos ângulos internos de um triângulo na geometria euclidiana mede 180°. Até este momento não surgiu nenhum espanto, mas a partir do momento que começaram a verificar que a soma desses ângulos na esfera não é 180°, mas sim um valor maior, começaram os questionamentos. Alguns deles construíam o triângulo e depois de perceber, através de suas averiguações, que a soma de seus ângulos internos era diferente de 180° apagavam e tornavam a fazer outro, maior ou menor (de área) para somarem suas medidas, quando viam que chegavam a outro resultado diferente do desejado, diziam que ou o transferidor não estava medindo corretamente, ou o tamanho da figura não era satisfatório.

Na atividade cinco do bloco de atividades sobre triângulos, foram feitas algumas verificações sobre as figuras, dentre elas uma pergunta sobre a conclusão que pode ser tirada a partir da construção dos triângulos em espaços diferentes. Um aluno respondeu que "em espaços diferentes temos propriedades distintas", outro mencionou: "que não podemos afirmar que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre 180°". Dessa maneira, a atividade contribuiu para que certas generalizações não fundamentadas sejam eliminadas e serviu também para que o participante ampliasse o conhecimento sobre os triângulos, certificando-se que nem sempre a soma dos seus ângulos internos tem a mesma medida de dois ângulos retos, estendendo assim o conhecimento deste, provável, futuro professor de Matemática. Além disso, que há triângulos diferentes para espaços distintos e que para saber o que é triangulo não basta conhecer a imagem, mas sim que é um polígono convexo com três ângulos e três lados.

Ponderamos que objetivo foi alcançado, pois as investigações acionadas pelas atividades conduziram o participante a definição geral de triângulo independente da geometria e, consequentemente, a ampliação do conceito e das propriedades do triângulo desprendidos, necessariamente, da imagem e que serão avaliadas mais à frente.

De modo geral, os participantes puderam examinar que a soma dos ângulos internos dos triângulos em três espaços diferentes e assim concluíram que esta soma só pode ser aceita como 180° para triângulos no plano euclidiano, uma vez que ao observarmos na geometria esférica, que é uma particularidade da elíptica, a soma desses ângulos é maior que 180° e a mesma verificação na geometria hiperbólica sua soma é menor que 180°. Essas diferentes imagens de triângulos em geometrias distintas geram deformações nas imagens "cristalizadas" do triângulo euclidiano.

Notadamente, observamos a violação das expectativas que iam ao encontro do paradigma, conforme a definição de anomalia apresentada por Kuhn (2009), nos resultados das atividades, uma vez que para o primeiro bloco concluímos que duas retas são paralelas de acordo com o padrão euclidiano, apenas na geometria sistematizada por Euclides, os alunos perceberam a transgressão no instante da percepção que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer não resulta sempre em 180°, esta afirmação só é aceita quando o triângulo é traçado no plano euclidiano porque ao mudarmos a geometria, possivelmente, esse valor será alterado, uma vez que, quando traçado sobre uma geometria esférica, a soma de seus ângulos internos será maior que 180° e, na geometria hiperbólica, será menor que 180°.

Consideramos que as situações externadas até o momento consistem em possibilidades de uso da HM na sala de aula a partir da exploração do tema geometria não euclidiana enquanto anomalia. Frente ao exposto, tecemos nossas considerações finais.

CONCLUSÃO

Durante todo o processo de pesquisa para este trabalho pensávamos como seriam as implicações pedagógicas de um questionamento até então em aberto (denominado por anomalia), que depois seria resolvido, e quais os conflitos cognitivos gerados seriam elucidados através de atividades que se utilizavam da história da matemática e investigação histórica como recursos pedagógicos capazes de enriquecer o processo das indagações, defendidos por Mendes (2009) e Ponte; Brocardo e Oliveira (2009). O estudo histórico do tema fomentou a seleção de investigações inerentes as atividades do produto de modo que observamos que contribuíram substancialmente para que o objetivo fosse alcançado que era identificar as anomalias, como algo que gera um conflito quando não está estruturado, como esclarece Barnett (2000) no seu entendimento, provocando diversos questionamentos, mas que serviu sobremaneira para a ampliação dos conceitos e de propriedades dos alunos. Desse modo, o estudo histórico do tema revela identificação das anomalias ao elucidar o processo de constituição da matemática, particularmente, das geometrias, e aponta caminhos para incorporação desses pontos em sala de aula sobretudo para uma compreensão mais ampla da própria matemática, nomeadamente, de elementos geométricos.

REFERÊNCIAS

BARNETT, Janet Heine. Anomalies and Development of Mathematical understanding. In: USING HISTORY TO TEACH MATHEMATICS AN INTERNATIONAL PERSPECTIVE, 2000, Washington. **Anais…** Washington: The mathematical Association of America, 2000, p.77-88.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

EUCLIDES. **Os Elementos**. São Paulo: UNESP, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

KUHN, Thomas S. **A estrutura das revoluções científicas**. São Paulo: Perspectiva, 2009.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e Investigação em Sala de Aula:** Tecendo Redes Cognitivas na Aprendizagem. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2009

NASCIMENTO, Anna Karla Silva do. **Geometrias não euclidianas como anomalias: implicações para o ensino de geometria e medidas.** 2013. 115 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.