RHMP
REVISTA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

**ISSN**: 2317-9546 ***e*-ISSN**: 2675-715X

# OS VERSOS DE LĪLAVĀTĪ COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO DA REGRA DE TRÊS SIMPLES E DIRETA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dianara Figueirêdo Freire[1]
Ana Carolina Costa Pereira[2]

**RESUMO**

A História da Matemática vem se destacando como fornecedora de recursos para o ensino de Matemática. Entre esses, encontram-se os documentos históricos, cujo uso possibilita a construção e a reconstrução de conhecimentos matemáticos. Nesse contexto, este artigo tem o intuito de contribuir com sugestão de recurso didático envolvendo a História da Matemática para professores da Educação Básica, principalmente, no que se refere a problemas com conceitos de regra de três simples e direta. Para isso, foi desenvolvida uma pesquisa documental, tendo como fonte principal o tratado *Līlavātī*, elaborado por *Bhāskarācārya*, no século XII. Dessa forma, foi perceptível que conceitos, regras e problemas propostos nesse tratado podem vir a ser potencialmente didáticos para discussões das relações entre as grandezas, mostrando ainda aspectos da cultura indiana.

**Palavras-chave:** Ensino de Aritmética. Regra de três simples e direta. *Līlavātī*. *Bhāskarācārya*. História da Matemática.

## INTRODUÇÃO

Recursos advindos da história vêm se tornando potencialmente didáticos para o ensino de Matemática, tornando-se subsídios para professores que, constantemente, têm buscado inovar, a fim de diminuir, no âmbito escolar, a aversão dos alunos à disciplina de Matemática. Isso possibilita promover alunos capazes de produzir e discutir conteúdos matemáticos, percebendo o seu significado para as civilizações antigas e atuais.

Desse modo, vários conceitos matemáticos merecem a atenção de pesquisadores, o que leva este artigo a focar no conteúdo de regra de três, que, por sua vez, é discutido nos Anos Finais do Ensino Fundamental e, mais detalhadamente, no Ensino Médio. Com isso, é necessário que os educandos percebam que a regra de três "se mostra como ferramenta útil no enfrentamento de situações específicas em seus ofícios, tais como: conversões de medidas, cálculos estequiométricos, porcentagem, juros simples e outros campos de práticas científicas" (SILVA, 2017, p. 13). Assim, através dos documentos históricos, podemos perceber a utilização desse conceito ao longo do tempo em situações do cotidiano de civilizações.

[1] Mestranda em Ensino de Ciências e Matemática (IFCE). E-mail: dianara.figueiredo07@aluno.ifce.edu.br .
[2] Pós-doutora em Educação Matemática (PUC-SP). E-mail: carolina.pereira@uece.br.

Nesse contexto, dentre os objetos da História da Matemática que trazem alguns conceitos de regra de três, tem-se o documento hindu[3], denominado *Līlavātī*, escrito no século XII, pelo estudioso das matemáticas *Bhāskarācārya*, conhecido também como Bhaskara II. É importante ressaltar que a versão original do tratado não está disponível, mas traduções podem ser encontradas em bibliotecas e livrarias, dentre elas, na língua inglesa, realizada por John Taylor, publicada em 1816, intitulada *Lilawati: or a treatise on Arithmetic and Geometry*.

Dessa forma, este artigo tem o intuito de contribuir com sugestão de recurso didático envolvendo a História da Matemática para professores da Educação Básica, principalmente, no que se refere a problemas com conceitos de regra de três simples e direta. O estudo está baseado nas competências e habilidades propostas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), expondo, portanto, considerações didáticas para seu uso. Para isso, são apresentados alguns aspectos contextuais da vida de *Bhāskarācārya* e de sua produção intelectual, em particular, o *Siddhāntaśiromani*, texto do qual *Līlavātī* faz parte. Também são descritos as regras e os problemas relacionados ao conteúdo de regra de três simples e direta. Por fim, são apresentadas algumas considerações didáticas para o uso do material na Educação Básica para a disciplina de Matemática.

## *Bhāskarācārya* (?1114 - ?1185) e o *Siddhāntaśiromani*

*Bhāskarācārya* ou Bhaskara II foi um astrônomo e astrólogo hindu, que nasceu em *Biddur*, uma cidade no *Deccan*, no ano de 1036, *Salivahana* (*Śaka*[4]), que corresponde ao ano 1114 da era cristã (TAYLOR, 1816). Já Eves (2011) afirma que ele viveu em Ujjain, localizada na região norte da Índia e morreu em 1185. Entretanto, o próprio *Bhāskarācārya* descreve, no último capítulo do livro *Golādhyāya*, que "ele pertencia à linhagem Śāndilya e que viveu em Vijjalavida" (PATWARDHAN; NAIMPALLY; SINGH, 2006, p. XVI). Embora não se saiba com precisão o local onde *Bhāskarācārya* viveu[5], Patwardhan, Naimpally e Singh (2006, p. XVI) afirmam que ele "estudou todas as ciências sob a orientação de seu pai Maheśvara. Maheśvara que foi um grande astrólogo. Como Bhāskarācārya estudou sob a orientação de um professor tão competente, ele se tornou um especialista em muitos ramos do aprendizado". Esse fato também pode ser confirmado na passagem do problema 61, da obra *Golādhyāya*.

---

[3] É importante alegar que "não se deve confundir hindu com indiano; os habitantes da Índia são os indianos, dentre os quais aqueles que adotam o Hinduísmo, como Religião, são os hindus" (CAMPOS NETO, 2009, p. 71).
[4] Calendário Hindu.
[5] Para uma discussão mais ampliada da cidade onde *Bhāskarācārya* viveu, vide: Patwardhan, Naimpally e Singh (2006, p. XVI e XVII).

Ele escreveu diversos trabalhos voltados para a área da Astronomia e da Matemática, sendo o mais conhecido um compilado de obras intitulado *Siddhāntaśiromani*, escrito aos 36 anos. Patwardhan, Naimpally e Singh (2006) comentam que essa obra está dividida em quatro partes: (1) *Līlavātī*; (2) *Bījaganita*[6], no qual aborda conceitos de Aritmética, Álgebra, Trigonometria, Geometria, Movimentos Planetários e Astronomia. Conforme Josefh (2016), existe uma hipótese segundo a qual o *Siddhāntaśiromani* apresentava as duas últimas partes dedicadas à Astronomia.

O livro *Līlavātī* é considerado como uma introdução aos assuntos de Astronomia, dedicando sua maior parte ao estudo da Aritmética, mas outras áreas do conhecimento também podem ser encontradas, como a Álgebra, a Trigonometria e a Geometria. Alguns livros de História da Matemática (BOYER, 2015; JOSEFH, 2016; EVES, 2011) contam uma lenda sobre a justificativa envolvendo a escrita do texto e o seu título. De acordo com Boyer (2015, p. 161):

> O nome do título é o da filha de Bhaskara que, segundo a lenda, perdeu a oportunidade de se casar por causa da confiança de seu pai em suas predições astrológicas. Bhaskara tinha calculado que sua filha só poderia se casar de modo propício em uma hora determinada de um dia dado. No dia que deveria ser o de seu casamento, a jovem ansiosa estava debruçada sobre o relógio de água quando se aproximava a hora do casamento, quando uma pérola em seu cabelo caiu, sem ser observada, e deteve o fluxo de água. Antes que o acidente fosse notado, a hora propícia passara. Para consolar a infeliz moça, o pai deu seu nome ao livro que estamos descrevendo.

Embora essa lenda seja encontrada em diversos livros didáticos, paradidáticos e de História da Matemática, não se tem certeza se é verídica. Outro ponto a destacar é o fato de o tratado *Līlavātī* ter sido utilizado por muitos anos nas escolas indianas, sendo essa afirmação confirmada por Patwardhan, Naimpally e Singh (2006, p. vi, tradução nossa), que ressaltam que *Līlavātī* “foi usado na Índia como livro didático por muitos séculos. Ainda agora, ele está sendo usado em escolas de sânscrito em alguns estados”. Refletindo, assim, sua importância acadêmica e histórica, principalmente, como forma de registrar o conhecimento de uma determinada época.

*Līlavātī* apresenta diversas definições, métodos matemáticos e 119 problemas com aplicações do conteúdo proposto, contendo uma Matemática prática, que ensina o saber/fazer. O livro não contém demonstrações, indicando um público-alvo mais geral (SILVA, SILVA, PEREIRA, 2018).

[6] Autores como Taylor (1816) e Plofker (2008) utilizam outra classificação para os livros de *Bhāskarācārya* contidos no *Siddhāntaśiromani*, entretanto, para este artigo, será apresentada a de Patwardhan, Naimpally e Singh (2006).

O livro *Bījaganita* é dedicado à Álgebra, em particular, ao estudo das equações. Em 1634, Ata Allah Rashidi traduziu para o persa esse tratado e uma versão inglesa foi publicada por Edward Strachey em 1813, na qual dividiu o livro em seis partes: (1) Introdução; (2) Sobre equações simples (1º grau); (3) Sobre equações quadráticas; (4) Sobre equações envolvendo questões indeterminadas do 1º grau; (5) Sobre equações envolvendo questões indeterminadas do 2º grau e (6) Sobre equações envolvendo retângulos (ACHARYA, 1813).

Os livros *Golādhyāya* e *Gaṇitādhyāya* se referem à Astronomia. Segundo Josefh (2016, p. 291, tradução nossa),

> A primeira seção de *Siddhantasiromani*, o *Ganitadhyaya*, contém uma discussão de métodos computacionais para calcular medidas como movimentos médios, movimentos verdadeiros, eclipses solares e lunares que formavam o modelo padrão do trabalho astronômico daquele período. A segunda seção, *Goladhyay*, contém assuntos relacionados à gola (ou a esfera) incluindo a forma e a forma da esfera e sua relevância para a terra esférica. Essa discussão é intercalada com uma interpretação poética da majestade das estações e perguntas para testar o conhecimento dos leitores.

Dessa forma, percebe-se que o tratado *Siddhāntaśiromani*, de *Bhāskarācārya*, traz importantes elementos para a reconstrução da Matemática indiana no século XII. Na próxima seção, é apresentada uma descrição panorâmica do primeiro livro, *Līlavātī*, objeto deste estudo, a partir da versão inglesa de 1816[7], traduzida por John Taylor.

## A tradução do *Līlavātī* por Taylor (1816)

A tradução *Lilawati: or a treatise on Arithmetic and Geometry* foi realizada por John Taylor e foi publicada em Bombaim, cidade ao sudoeste da Índia, em 1816. Essa edição se encontra no acervo da coleção da biblioteca de Cambridge e foi feita a partir de um trabalho colaborativo com *Royal Asiatic Society da Grain Britain e Irlanda.* Consoante Taylor (2016, p. 3), o objetivo da tradução é

> fornecer um documento autêntico que, ao exibir não apenas o grau real de conhecimento matemático possuído pelos hindus no século XII, mas também, ao mostrar seus modos e princípios de operação, pode levar a uma conclusão justa sobre suas pretensões de originalidade neste departamento de ciência.

Nessa versão, Taylor (1816), inicialmente, apresenta uma introdução contendo a biografia de *Bhāskarācārya*, uma breve descrição dos livros e comentários sobre as alterações feitas na sua tradução, justificando-as. De acordo com ele,

> O Lilavati exibe um sistema aritmético regular, bem relacionado e, considerando o período em que foi escrito; contém muitas proposições úteis em geometria e mensuração. É o primeiro trabalho que é estudado por astrônomos hindus, ou melhor,

[7] Outras traduções podem ser encontradas. Para maiores informações, vide: Freire e Pereira (2021).

> astrólogos; pois neste país essas duas profissões estão sempre unidas e, em geral, a primeira é considerada subserviente à última. As regras são escritas em versos em um estilo muito conciso e elíptico, e não possuem em nenhum grau a obscuridade, característica das composições sânscritas sobre ciência e filosofia (TAYLOR, 1816, p. 2, tradução nossa).

Também são apresentados alguns conceitos matemáticos introdutórios, como a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão, às quais o tradutor alega que essas merecem atenção, pois as operações são apresentadas por *Bhāskarācārya* de um modo singular, não existente em nenhum outro livro didático. A seguir, Taylor (1816) apresenta a descrição das partes de *Līlavātī*, conforme o Quadro 1 a seguir:

**Quadro 1** – Conteúdo de *Līlavātī* na versão de Taylor (1816)

| PARTE | CONTEÚDO |
|---|---|
| **I** | (1) Tabelas de dinheiro, pesos etc.; (2) Adição e Subtração; (3) Multiplicação; (4) Divisão; (5) O quadrado; (6) Raiz quadrada; (7) Cubo; (8) Raiz cúbica; (9) Frações; (10) O Efeito da Cifra; (11) Inversão; (12) Um número presumido; (13) Multiplicador da Raiz; (14) Regra das três quantidades; (15) Regras de Cinco etc. quantidades; (16) Regra de trocas; (17) Quantidades mistas; (18) Comprando e vendendo; (19) Computando ouro; (20) Permutação; (21) Progressão. |
| **II** | **CAPÍTULO I:** Operações Geométricas.<br>**CAPÍTULO II: Seção I** – Dos círculos; **Seção II –** De libras; **Seção III –** Dos tijolos ou pedras em parede; **Seção IV –** Do Corte de madeiras etc.; **Seção V –** De montes; **Seção VI –** Das sombras. |
| **III** | **Seção I** – Do *Kutaka*; **Seção II -** Do *Sthira* ou *Kutaka* Fixo; **Seção III –** Do *Sanslista Kutaka*. |
| **IV** | Das transposições; Apêndice. |

Fonte: Adaptado de Taylor (1816).

No Quadro 1, percebe-se que Taylor (1816) faz uma divisão por áreas da Matemática, tais como Aritmética, Geometria e Álgebra. No entanto, é perceptível que os títulos das partes estão atrelados a aspectos do contexto indiano, como, por exemplo, na parte 1, na qual pode-se encontrar "comprando e vendendo", "computando ouro" e, na parte II, aparecem as sombras, as lagoas, entre outros.

Ao longo da tradução, Taylor (1816) apresenta comentários sobre os registros de *Bhāskarācārya*, explicando, detalhadamente, algumas passagens por meio da Matemática atual. Além disso, ele esclarece alguns termos de origem indiana, como, por exemplo, a *Kutaka*, que se refere a termos desconhecidos presentes em problemas da terceira parte de *Līlavātī*. Por fim, Taylor (1816) apresenta um anexo com figuras presentes em *Līlavātī*, que ajudam a entender os problemas concernentes à Geometria.

Em relação aos aspectos matemáticos, *Līlavātī* traz uma gama de conteúdos, que podem ser utilizados na Educação Básica, tais como adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais e frações, áreas, volumes, equações do 1º grau, propriedades dos triângulos, entre outros. A seção a seguir é dedicada aos conceitos envolvendo regra de três.

## REGRAS E PROBLEMAS SOBRE A REGRA DE TRÊS PRESENTES EM *LĪLAVĀTĪ*

O conteúdo envolvendo regra de três é apresentado na parte I, seção VI, intitulada de *Regra das três quantidades*, nas páginas 41 e 42. Essa parte é sucinta e, nela, *Bhāskarācārya* (1816) apresenta um texto corrido conceituando a regra de três simples: direta e inversa, trazendo exemplos envolvendo quantidades de medidas (peso, massa, entre outros). Neste artigo, será apresentada apenas a regra de três simples e direta.

Quanto à regra de três simples e direta, *Bhāskarācārya* (1816, p. 41) inicia com uma explicação sobre as relações entre as quantidades:

> A quantidade cujo produto é dado e a quantidade cujo produto é exigido, deve estar da mesma denominação, ou seja, o primeiro e último termo. A outra quantidade produto dado e do termo médio é de uma denominação diferente.
> Multiplique o termo médio pela quantidade cujo produto é exigido, e divida pela quantidade do produto dado, ou seja, o primeiro termo: o quociente será a quantidade pretendida.

No início da citação, *Bhāskarācārya* (1816) deixa implícito que existem quatro quantidades, A, B, C e D, duas do produto dado e duas do produto pedido, que devem ter a mesma "denominação" ou "tipo", ou seja, a mesma grandeza. Dessa forma, a quantidade cujo produto dado é o primeiro termo, chama-se de A; a quantidade cujo produto é exigido é o quarto termo, ou seja, o último, chama-se de D; a quantidade pretendida, o segundo termo, chama-se de B e a quantidade relacionada ao termo médio, que se refere ao terceiro termo, chama-se de C.

Em seguida, ele ressalta: "Multiplique o termo médio pela quantidade cujo produto se procura e divida o produto assim obtido pelo primeiro termo: o quociente será o produto pretendido" (BHĀSKARĀCĀRYA, 1816, p. 41). Seguindo essa orientação, tem-se:

$$B = \frac{C \times D}{A}$$

Nos quais,

- Quantidade referente ao termo médio (terceiro termo) – C

- Quantidade referente ao produto exigido (quarto termo) – D
- Quantidade referente ao produto dado (primeiro termo) – A
- Quantidade referente ao produto pretendido (segundo termo) – B

Nesse contexto, ao se relacionar com a regra de três, percebe-se que *Bhāskarācārya* aborda a seguinte situação $A\colon C = D\colon B$, que resulta no fato de a multiplicação dos últimos termos ser igual à multiplicação dos meios termos, ou seja, $A \times B = C \times D \rightarrow B = \frac{C \times D}{A}$, chegando-se ao mesmo que foi proposto na regra supracitada anteriormente.

Posteriormente, *Bhāskarācārya* (1816, p. 41) traz três exemplos e suas respostas (declarações)[8]:

> **Exemplo:** Duas palas e meia de açafrão são compradas por três sétimos de uma niska. Quantos serão comprados por nove niskas?
> **Declaração:** $\frac{3}{7}, \frac{2}{5}, \frac{9}{1}$[9]. Palas de açafrão obtida: $52\frac{1}{2}$
> **Exemplo:** Sessenta e três palas de cânfora fina produzem cento e quatro niskas. O que doze palas e um quarto produzirão?
> **Declaração:** 63, 104, $\frac{49}{4}$. Produzir, 20 niskas, 3 drammas, 8 panas, 3 kakinis, 11 waratakas e a fração de uma warataka $\frac{1}{9}$.
> **Exemplo:** Uma kharika e um oitavo de arroz estão para dois drammas. Quantos serão obtidos por setenta panas.
> Neste caso, os dois drammas são reduzidos a panas, a fim de que o número cujo produto é dado possa ser da mesma denominação.
> **Declaração:** 32, $\frac{9}{3}$, 70. Quantidade obtida, 2 kharikas, 7 dronas, 1 adhaka, 2 prasthas.

Percebe-se que *Bhāskarācārya* (1816) não fornece a resolução do problema, deixando-a a cargo do leitor. Taylor (1816, p. 41) também não apresenta nenhuma informação nos comentários, mas alega que "os três exemplos desta regra são muito simples para exigir qualquer ilustração dos comentários". Com isso, percebe-se que esses problemas eram exemplificados como de fácil compreensão naquela época, porém há muito o que ser explorado nesses, como veremos a seguir.

O **primeiro exemplo** traz um problema envolvendo a compra de açafrão: *Duas palas e meia de açafrão são compradas por três sétimos de uma niska. Quantas palas serão compradas por nove niskas?* Seguindo os passos de *Bhāskarācārya* (1816), para encontrar o número de açafrões, tem-se que verificar, primeiramente, se a quantidade dada e a quantidade pedida têm a mesma denominação[10]. No exemplo citado, ambas são *niskas*, então, pode-se seguir para o

[8] *Bhāskarācārya* (1816), no início de seu tratado, apresenta diversas tabelas de unidades de medidas (pesos, dinheiro, grãos, medidas de terrenos, entre outros), que serão utilizadas no decorrer dos exemplos propostos. Nos exemplos envolvendo regra de três simples e direta, ele traz unidade monetária (*niska,* dramma, pana, kakini e warataka) e unidade de grãos (kharika, drona, adhaka e prastha).

[9] Ressalta-se que *Bhāskarācārya* (1816) não utiliza a barra para separação do numerador e denominador, porém, para este artigo, foi realizado um tratamento didático.

[10] Ter a mesma denominação significa estar na mesma grandeza, ou seja, na mesma unidade de medida.

próximo passo. Pela orientação dada por *Bhāskarācārya* (1816), percebe-se que C é o termo médio, ou seja, duas *palas* e meia (2 ½); D é a quantidade cujo produto é demandado, isto é, nove (9) e o primeiro termo A é três sétimos $\left(\frac{3}{7}\right)$. Assim, aplicando-se a regra $B = \frac{C \times D}{A}$, tem-se:

$$B = \left(2\frac{1}{2} \times 9\right) : \frac{3}{7}$$

$$B = \left(\frac{5}{2} \times 9\right) : \frac{3}{7} = \frac{45}{2} : \frac{3}{7} = \frac{45}{2} \times \frac{7}{3} = \frac{315}{6}$$

$$B = \frac{315}{6} = \frac{312}{6} + \frac{3}{6} = 52 + \frac{1}{2}$$

$$B = 52\frac{1}{2}$$

Dessa maneira, deve-se comprar cinquenta e duas *palas* e meia de açafrão, conforme indicado na declaração. No **segundo exemplo**, traz um problema envolvendo a produção de cânfora, ingrediente utilizado na Índia para acentuar o sabor de alguns alimentos e em cerimônias religiosas: *Sessenta e três palas de cânfora fina produzem cento e quatro niskas. O que doze palas e um quarto produzirão?*

Observa-se, nesse caso, que se deve encontrar quanto será pago pelas dozes *palas* e um quarto. Utilizando-se, novamente, a orientação de *Bhāskarācārya* (1816), tem-se que $C = 104, D = 12\frac{1}{4} = \frac{49}{4}, e\ A = 63$. Pela regra $B = \frac{C \times D}{A}$, tem-se:

$$B = \frac{\left(104 \times \frac{49}{4}\right)}{63}$$

$$B = \frac{\frac{5096}{4}}{63} = \frac{5096}{4} \times \frac{1}{63}$$

$$B = \frac{5096}{252} = \frac{182}{9}$$

$$B = 20\frac{2}{9}.$$

Portanto, o total pago pela cânfora será $20\frac{2}{9}$ *niskas*. Entretanto, na declaração apresentada por *Bhāskarācārya* (1816, p. 41), aparece: “Produzir, 20 *niskas*, 3 *drammas*, 8 *panas*, 3 *kakinis*, 11 *waratakas* e a fração de uma *warataka* 1/9”. Para conseguir chegar a esse resultado, o leitor terá que fazer as transformações de medidas, descobrindo quanto equivalem $\frac{2}{9}$ de *niskas* nas demais unidades. O autor apresenta, no início do texto, a Figura 1, isto é, uma tabela de equivalência do dinheiro:

**Figura 1** - Tabela de dinheiro

TABLE OF MONEY.[A]

| | |
|---|---|
| 20 Varataka[B] .......... | 1 Kakini |
| 4 Kakini ............ | 1 Pana |
| 16 Pana .............. | 1 Dramma |
| 16 Dramma .......... | 1 Niska |

Fonte: Bhāskarācārya (1816, p. 1).

Primeiramente, precisa-se encontrar o quanto equivalem $\frac{2}{9}$ de *niskas* em *drammas*. Como 1 *niska* equivale a 16 *drammas*, então, $\frac{2}{9}\ de\ 16$ equivalem a $\frac{2}{9} \times 16 = \frac{32}{9} = \frac{27}{9} + \frac{5}{9} = 3\frac{5}{9}$. Assim, obtém-se que $\frac{2}{9}$ de *niskas* são iguais a $3\frac{5}{9}$ de *drammas*. Logo, $20\frac{2}{9}$ *niskas* serão **20 *niskas* e $3\frac{5}{9}$ *drammas***. Agora, transformam-se $\frac{5}{9}$ de *drammas* em *panas*. Como 1 *drama* equivale a 16 *panas*, então, $\frac{5}{9}\ de\ 16 = \frac{5}{9} \times 16 = \frac{80}{9} = \frac{72}{9} + \frac{8}{9} = 8\frac{8}{9}$ . Dessa maneira, o resultado: 20 *niskas* e $3\frac{5}{9}$ *drammas* pode ser substituído por **20 *niskas*, 3 *drammas* e $8\frac{8}{9}$ *panas***. Partindo-se do resultado anterior, precisam-se transformar $\frac{8}{9}$ de panas em *kakinis*. Como 1 *pana* = 4 *kakini*, então, $\frac{8}{9}\ de\ 4 = \frac{8}{9} \times 4 = \frac{32}{9} = \frac{27}{9} + \frac{5}{9} = 3\frac{5}{9}$. Destarte, 20 *niskas*, 3 *drammas*, $8\frac{8}{9}$ panas podem ser substituídos por **20 *niskas*, 3 *drammas*, 8 *panas* e $3\frac{5}{9}$ *karikas***. Em suma, transformam-se $\frac{5}{9}$ de *karikas* em *varataka*. Sabendo-se que 1 *kakini* equivale a 20 *varataka*, têm-se $\frac{5}{9}\ de\ 20 = \frac{5}{9} \times 20 = \frac{100}{9} = \frac{99}{9} + \frac{1}{9} = 11\frac{1}{9}$. Logo, 20 *niskas*, 3 *drammas*, 8 *panas*, $3\frac{5}{9}$ *karikas* podem ser substituídos por **20 *niskas*, 3 *drammas*, 8 *panas*, 3 *karikas*, $11\frac{1}{9}$ *varatakas***. Total final exposto na declaração.

Por fim, o **terceiro exemplo** envolve arroz: *Uma kharika e um oitavo de arroz estão para dois drammas. Quantos serão obtidos por setenta panas.* Observa-se que a quantidade dada e a requerida estão em unidades distintas, ou seja, dois *drammas* e 70 *panas*. Pela regra de *Bhaskaracarya* (1816), deve-se estar na mesma unidade de medida. Dessa forma, pela tabela (Figura 1) fornecida, 2 *drammas* são iguais a 32 *panas*. Com isso, seguindo as orientações do autor, tem-se que $C = 1\frac{1}{8}\ ,\ D = 70\ e\ A = 32$. E seguindo-se a regra $B = \frac{C \times D}{A}$, tem-se:

$$B = \frac{\left(1\frac{1}{8} \times 70\right)}{32} = \frac{\left(\frac{9}{8} \times 70\right)}{32}$$

$$B = \frac{\left(\frac{630}{8}\right)}{32} = \frac{630}{8} \times \frac{1}{32}$$

$$B = \frac{630}{256} = \frac{315}{128}$$
$$B = 2\frac{59}{128}.$$

Portanto, pode-se comprar $2\frac{59}{128}$ *kharikas* de arroz por 70 *panas*.

Conforme a declaração, tem-se que a quantidade obtida será 2 *kharikas*, 7 *dronas,* 1 *adhaka*, 2 *prasthas*. Para conseguir chegar a esse resultado, o leitor terá que fazer as transformações de medidas, descobrindo quanto equivalem $\frac{59}{128}$ em outras medidas. O autor apresenta, no início do texto, a Figura 2, isto é, uma tabela de grãos com equivalência das medidas:

**Figura 2** - Tabela de dinheiro

GRAIN MEASURE.

| | |
|---|---|
| 16th of a Kharika c ...... | 1 Drona. |
| 4th of a Drona .......... | 1 Adhaka. |
| 4th of an Adhaka ........ | 1 Prast,ha. |
| 4th of a Prast,ha ........ | 1 Kudava. |

Fonte: Bhāskarācārya (1816, p. 3).

Primeiramente, precisa-se encontrar quanto equivalem $\frac{59}{128}$ *kharikas* em *drona*. Como 1 *drona* equivale a 16 de um *kharika*, então, $\frac{59}{128}\ de\ 16$ equivalem a $\frac{59}{128} \times 16 = \frac{944}{128} = 7\frac{48}{128}$. Assim, $\frac{59}{128}$ *kharikas* são $7\frac{48}{128}$ *dronas*. Logo, $2\frac{59}{128}$ *kharikas* serão **2 *karikas*, 7 $\frac{48}{128}$ *dronas*.** Realizando-se a transformação de unidade de $\frac{48}{128}$ *drona* para seu equivalente em *adhaka*, tem-se que 4 de um *drona* equivalem a 1 *adhaka*, então, $\frac{48}{128}\ de\ 4 = \frac{48}{128} \times 4 = \frac{192}{128} = 1\frac{64}{128}$. Logo, o resultado 2 *karikas* e $7\frac{48}{128}$ *dronas* equivalem a **2 *karikas*, 7 *dronas*, 1 $\frac{64}{128}$ *adhaka*.** Por fim, deve-se converter $\frac{64}{128}$ *adhaka* em *prastha*, no qual 4 de um *adhaka* equivalem a 1 *prastha*, então, $\frac{64}{128}\ de\ 4 = \frac{64}{128} \times 4 = \frac{256}{128} = 2$. Portanto, o resultado ficará **2 *karikas*, 7 *dronas*, 1 *adhaka*, 2 *prasthas***, como foi indicado na declaração.

## ALGUMAS CONSIDERAÇÕES DIDÁTICAS

A seção VI do texto de *Līlavātī* traz conceitos envolvendo regra de três, que podem ser explorados pelos professores da Educação Básica, a fim de inserir-se a História da Matemática por meio de problemas do cotidiano hindu. Esse conteúdo é mencionado na Base Nacional

Comum Curricular (BRASIL, 2018), acarretando habilidades que os alunos devem alcançar no decorrer do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano), principalmente, no diálogo das relações entre as grandezas:

> - (EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas (BRASIL, 2018, p. 307).
> - (EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas (BRASIL, 2018, p. 313).
> - (EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas (BRASIL, 2018, p. 317).

Nesse contexto, a BNCC (BRASIL, 2018) traz a possibilidade de resolver e de elaborar problemas, que recaem diretamente nos apresentados por *Bhāskarācārya* (1816). O excerto selecionado, que exemplifica a regra de três, recai em problemas envolvendo temperos e alimentos indianos, que, por sua vez, utilizam diversas unidades de medidas *(pana, niska, dammas, kharika, dronas, adhaka, prasthas*, entre outros), contextualizando, assim, o conteúdo estudado. Além do estudo da própria Matemática, o texto pode desenvolver uma discussão sobre a cultura hindu, em particular, do século XII, evidenciando as matemáticas práticas daquele período.

Embora os problemas propostos estejam direcionados à regra de três simples e direta, diversos conteúdos matemáticos podem ser explorados pelo professor da Educação Básica, tais como proporção, transformação de unidades de medidas, frações mistas, entre outros. Isso pode favorecer as relações entre os conceitos matemáticos, dissociando-os de uma aprendizagem linear, na qual os conhecimentos são compartimentados e separados. Dessa forma, esses problemas podem ser o início de uma interface entre a história e o ensino de Matemática, especificamente, da regra de três simples e direta.

## NOTAS FINAIS

O livro de *Bhāskarācārya*, *Līlavātī*, traz uma diversidade de conteúdos matemáticos, que perpassam pela Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria do século XII, na Índia e que chegam aos dias atuais. Dentre os vários conceitos apresentados no texto, este artigo focou-se na regra de três, especialmente, na simples e direta, ou seja, envolvendo problemas que versam sobre as grandezas diretamente proporcionais, trazendo possibilidades didáticas de inserção da História da Matemática na Educação Básica. Isso recai na utilização de fontes históricas, que podem se revelar potencialmente didáticas para se discutir Matemática em sala de aula e ainda propiciar aos estudantes um encontro com outras culturas.

Portanto, outros estudos devem ser realizados envolvendo os tratados de *Bhāskarācārya*, em particular, *Līlavātī*, buscando-se um diálogo entre a história e o ensino de Matemática, para a construção do conhecimento matemático mais significativo. Infelizmente, trabalhos com fontes histórias hindus pouco têm chegado nas salas de aulas brasileiras. É necessária uma ampliação de pesquisa dessa natureza para que esses exemplos/problemas adentrem no ensino de Matemática.

**Referências**


ACHARYA, Bhascara Acharyabhascara. **Bija Ganita**: or, the algebra of the hindus. London: W. Glendinning, 1813. Tradução de: Edward Strachey.

BHĀSKARĀCĀRYA. **Līlavātī of Bhāskarācārya:** A Treatise of Mathematics of Vedic Tradition. Tradução: Krishnaji S. Patwardhan, Somashekhara A. Naimpally e Shyam L. Singh. New Delhi: Motilal Banarsidass, 2006.

BHĀSKARĀCĀRYA. **Lilawati:** or a treatise on Arithmetic and Geometry. Tradução: John Taylor. Bombay: Literary society of Bombay, 1816.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CAMPOS NETO, A. A. M. O Hinduísmo, o direito Hindu, o direito Indiano. **Revista da Faculdade de Direito da Universidade de São Paulo**, São Paulo, v. 104, p. 71-111, 2009.

EVES, H. **Introdução a história da matemática**. Tradução: Hygino Domingues. 5. ed. Campinas - SP: Editora da UNICAMP, 2011.

FREIRE, D. F.; PEREIRA, A. C. C. Uma breve descrição do tratado Līlāvatī Of Bhāskarācārya do Século XII. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, v. 10, p. 119-135, 2021.

JOSEPH, G. G. **Indian Mathematics:** Engaging with the Word from Ancient to Modern Time. Canadá: World Scientific, 2016.

PATWARDHAN, K. S.; NAIMPALLY, S. A.; SINGH, S. L. Introduction. In: **A Teatrise of Mathematics of Vedic Tradition**. New Delhi: Motilal Banarsidass, 2006.

PLOFKER, K. **Mathematics in India**. Estados Unidos: Princeton University Press, 2008.

SILVA, D. P. **A invariável prática da regra de três na escola**. Tese. (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas), Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém-PA, 2017.

SILVA, I. C. da; SILVA, J. H. da; PEREIRA, A. C. C. Os versos de Lilavati como fonte histórica para o ensino de Matemática: propondo uma prática. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 4, n. 1, p. 78–87, 2018.

TAYLOR, J. Introduction. In: **Lilawati**: or a treatise on Arithmetic and Geometry. BHĀSKARĀCĀRYA. Bombay: Literary society of Bombay, 1816.

***Submetido em*: 17 de janeiro de 2022.**

***Aprovado em*: 06 de março de 2022.**