RHMP
REVISTA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

ISSN: 2317-9546 ***e*-ISSN**: 2675-715X

A PARIDADE PRESENTE EM DUAS CONTRIBUIÇÕES TOPOLÓGICAS: EULER E MÖBIUS

Maxwell Gonçalves Araújo[1]
Sergio Roberto Nobre[2]

RESUMO

O intuito deste artigo é apresentar uma forma contextualizada de se trabalhar conteúdos mais complexos, no caso a Topologia, e iniciarmos este estudo considerando uma particularidade elementar das teorias, no nosso exemplo, ligadas ao básico da Teoria dos Números. O contrário também pode ser feito, ou seja, partirmos do complexo para o elementar, sempre observando que a proposta inicial não exige aprofundamento da parte que encerra mais conceitos nos conteúdos. O projeto constitui-se em introduzir tópicos de Topologia, destacando uma propriedade elementar comum entre o estudo dos problemas das pontes de Königsberg e da Faixa de Möbius. No caso do modelo aqui apresentado, esta propriedade é o Teorema da Paridade aplicada aos números naturais. Para tanto, utilizaremos um problema clássico de operações fundamentais que envolve várias variáveis e, por esse motivo, exige uma análise, antes de sua solução, sob essa perspectiva, ou melhor, utilizando-se dessa teoria. Nossa vontade é, também, de colaborar para que os tortuosos e difíceis caminhos da pesquisa histórica, vistos *a priori*, se transformem em prazer e conhecimento *a posteriori*, ajudando a diminuir, mesmo que minimamente, o negligenciamento pelo qual a História da Matemática vem passando por todos estes anos.
Palavras-chave: História da Matemática. Euler. Möbius. Teorema da Paridade.

INTRODUÇÃO

Com o propósito de resgatar um trabalho já iniciado em meados dos anos 2000, com o incentivo, na época, dado pela Série “Arte & Matemática” (TV Escola e TV Cultura, 2001), foram escolhidos os matemáticos Leonhard Paul Euler e August Ferdinand Möbius para o desenvolvimento desse texto. À época, a intenção era introduzir o tema *Teorema da Paridade*, utilizando-se de recursos teóricos utilizados na *Topologia*, envolvendo os matemáticos supracitados. Ao reavermos essa ideia, despertou-nos a necessidade de, também, aprofundar um pouco mais na parte histórica. Uma contextualização envolvendo o conteúdo em destaque, de cada um dos matemáticos, também se fez necessária. A Paridade contida no Problema das Pontes de Königsberg e na Faixa de Möbius ilustram bem essa necessidade.

O intuito de apresentar uma forma contextualizada de se trabalhar conteúdos mais complexos, no caso a Topologia, e iniciarmos este estudo considerando uma particularidade elementar das teorias, no nosso exemplo, ligadas ao básico da Teoria dos Números, é o nosso

[1] IFG (Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Goiânia, Goiás). Mestre em Educação em Ciências e Matemática pela UFG. E-mail: mxnte@yahoo.com.br
[2] UNESP (Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo). Doutor em História da Matemática pela *Sektion Mathematik* e *Karl Sudhoff Institut* da Universidade de Leipzig. E-mail: sergio.nobre@unesp.br

principal objetivo com esta apresentação. Esse olhar por uma perspectiva diferente aos conteúdos matemáticos justifica essa breve explanação.

Este é o resultado de uma possível perspectiva diferenciada e aprofundamento, mesmo que, você leitor(a) verá, ainda seja algo superficial. Então: "senta que lá vem a história"[3]!

CONTEXTOS HISTÓRICOS

Filho de Paul Euler e Margaret Brucker, Leonhard Paul Euler nasceu em 15 de abril de 1707, na cidade de Basel, Suíça. Incentivado pelo pai, Euler se tornou autodidata em Matemática e entrou para a Universidade aos 14 anos. Aos 17, já era mestre em filosofia, com um trabalho onde fazia um paralelo entre as ideias de René Descartes e Isaac Newton. Após a intervenção de Johann Bernoulli, Euler muda da Teologia para a Matemática. Aos 19 anos, graduou-se em Matemática e, após algumas investidas sem sucesso, ingressou, aos 20, na Academia de Ciências de São Petersburgo. Foi tenente na marinha russa de 1727 a 1730 e, ainda em 1730, assume o cargo de professor de física na Academia, tornando-se membro pleno dela aos 24 anos, desistindo, assim, da marinha. Com a saída de Daniel Bernoulli da Academia em 1733, Euler assume o seu lugar na cadeira sênior de matemática. Essa nova posição vem acompanhada de um salário consideravelmente melhor, e isso faz com que Euler, em 7 de janeiro de 1734, se case com Katharina Gsell, com quem tem 13 filhos. "Euler afirmou que fez algumas de suas maiores descobertas matemáticas enquanto segurava um bebê nos braços com outras crianças brincando em volta de seus pés[4]" (O'CONNOR e ROBERTSON, 1998).

Ainda de acordo com O'connor e Robertson (1998), nesta fase de sua vida, Euler já apresentava algumas de suas áreas de concentração em pesquisas: Teoria dos Números, Funções Especiais/Cálculo Variacional e Equações Diferenciais (Mecânica Racional). Deste período, dentre vários trabalhos publicados, destacamos o livro *Mechanica* (1736 – 37), porta de entrada de um período de trabalho matemático intenso.

Como este texto não tem caráter biográfico, iremos interromper o detalhamento da vida de Euler nesse ponto, para destacar outra de suas obras desse período que é o foco principal desta abordagem. A obra em questão é *Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis*, baseada em uma palestra apresentada à *Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* em 1735. É nessa obra que Euler desenvolve suas ideias a respeito da Solução de um problema

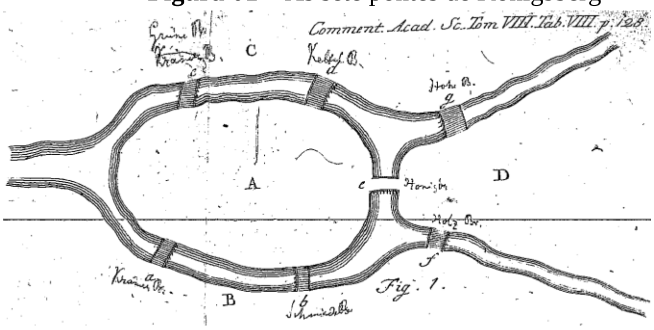
[3] "Senta, que lá vem a história" foi um quadro do "programa Rá-Tim-Bum [que] começou a ser produzido pela TV Cultura em 1989 e foi ao ar, pela primeira vez, em 5 de fevereiro de 1990. [...] O programa possuía diversidade muito grande de personagens, cada um com objetivo pedagógico distinto, alguns fixos e outros variados conforme a história do quadro, [como por] exemplo, o Senta, que lá vem a história" (SILVA et al., 2009, p. 3 e p.8).
[4] Tradução dos autores.

pertinente à Geometria de situação[5]. Este problema é o das sete pontes de Königsberg. Com o cuidado metódico e primoroso argumento explicativo, Euler observa:

> §. 3. O que certamente diz respeito ao problema das sete pontes de Königsberg é que ele pode ser resolvido com a total enumeração de todos os cursos que podem ser estabelecidos. Com isso, saberíamos se algum curso viria a satisfazer o problema ou não. Mas esse modo de resolução seria demasiadamente difícil e trabalhoso por causa do grande número de combinações, e em outras questões com muito mais pontes certamente não poderia ser empregado. Além disso, se essa operação fosse assim levada a cabo, seriam encontradas muitas coisas que não estavam no problema, o que sem dúvida seria a origem de grande dificuldade. Por isso, tendo deixado esse método de lado, procurei outro que não faria mais do que mostrar se tal caminho pode ser feito ou não, pois suspeitei que um tal método seria muito mais simples (LOPES e TÁBOAS, 2015, p. 26).

Feito este esclarecimento, Euler desenvolve seu raciocínio: consideremos a ilustração do problema, representada pela Figura 01[6]:

Figura 01 – As sete pontes de Königsberg



Fonte: Recorte feito pelo autor da obra original reimpressa – vide Referências: Euler (1736)

Euler utilizou as letras maiúsculas A, B, C, ... para designar cada uma das diferentes regiões, e as letras minúsculas a, b, c, ... para representar cada uma das pontes. Assim, a representação AB, significa que estamos indo da região A para a região B. Se introduzirmos mais letras, por exemplo: ABC, isso significa que partimos da região A para a região B e, logo após, partimos da região B para a região C. E mais, se fizermos a seguinte representação: AaBdC, significa que fomos da região A para a região B, utilizando a ponte "a", e fomos da

[5] Até esta data, a palavra Topologia, para designar problemas desse tipo, ainda não havia sido cunhada. O termo utilizado era *geometria situs*. No artigo *Euler e as Pontes de Königsberg*, Lopes e Táboas traduzem este texto, procurando "não modernizar o texto ou empregar o vocabulário técnico corrente". Agindo assim eles pretendem "favorecer interpretações mais convenientes acerca do universo de ideias e concepções do autor. A começar pelo título". Eles traduzem "*geometria situs*, já tradicionalmente traduzida como geometria de posição em língua portuguesa, por geometria de situação" (LOPES e TÁBOAS, 2015, p. 24).

[6] É importante ressaltar que, nas referências da fonte da Figura 01, a data de referência recomendada é a do ano de 1741. No artigo *About the cover: Euler and Konigsberg's bridges: A Historical View*, de Gerald L. Alexanderson, encontraremos, na p. 572, a data das gravuras feitas por Euler: ano de 1736. Na p. 573, está a imagem da contracapa do *Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, onde está o artigo de Euler no qual ele se baseou para escrever o *Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis*. Data: 1736. Assim, adotamos esta data nas referências aqui utilizadas. O artigo de Alexanderson está disponível em: http://5010.mathed.usu.edu/Fall2018/THigham/Alexanderson.pdf. Acesso em: 12 Fev. 2021.

região B para a região C, utilizando a ponte “d”. Esta representação conduz Euler ao seu método, o qual ele justifica com os seguintes argumentos:

> §. 8. Se o número de pontes for um número ímpar qualquer, e se a esse número for acrescentada uma unidade, sua metade dará quantas vezes a letra [...] deve ocorrer.
> §. 10. [...] Se o número de pontes que conduzem a uma região qualquer for ímpar, é possível julgar se o trânsito pode ser feito uma só vez através de cada uma. Pois se ocorre que a soma de todas as vezes em que cada letra deve ocorrer for igual ao número de todas as pontes aumentado em uma unidade, então tal trânsito pode ser feito. Se, do contrário, [...] a soma de todas as vezes for maior que o número de pontes aumentado em uma unidade, então tal trânsito não pode, de forma alguma, ser feito.
> §. 13. [...] Defino, a partir do número de pontes que levam a uma região, o número de vezes que uma letra que denota uma região deve ocorrer como a metade da soma do número de pontes aumentado em uma unidade, se o número de pontes for ímpar; e metade do número de pontes se este for par. Daí que, se o número de todas as vezes se iguala ao número de pontes aumentado em uma unidade, então é possível o trânsito desejado, tomando-se o início a partir da região à qual leva um número ímpar de pontes. Mas se, por outro lado, o número de todas as vezes for menor em uma unidade do que o número de pontes aumentado em uma unidade, então o trânsito é possível com início na região a qual conduz um número par de pontes, porque desse modo o número de vezes será aumentado em uma unidade (LOPES e TÁBOAS, 2015, p. 27 – 28).

Ou seja, exemplificando:

§. 8. Há 5 pontes que chegam/partem de A. Logo, A deve aparecer $\frac{(5+1)}{2}$ vezes, ou seja, 3 vezes;

§. 10. Total de pontes é igual a 7. Logo, o trajeto é possível se a *Soma das ocorrências de cada região* = *Total de Pontes + 1* = 7 + 1 = 8;

O Quadro 01 a seguir ilustra esses valores:

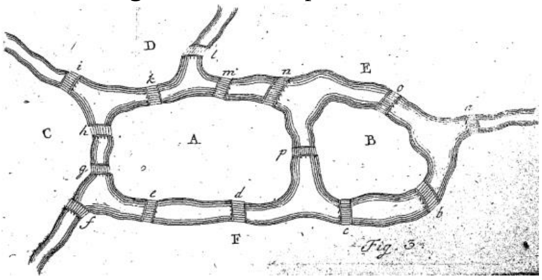
Quadro 01 – Dados do Problema das Pontes de Königsberg

Regiões	**Número de Pontes por Região**	**Ocorrências de cada região**
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
Total		**9**

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

§. 13. Como a *Soma das ocorrências de cada região* > *Total de Pontes + 1*, ou seja, *9 > 8*, então o trajeto *não é possível*. Euler apresenta um outro exemplo para análise:

Figura 02 – Exemplo de Euler



Fonte: Recorte feito pelo autor da obra original reimpressa – vide Referências: Euler (1736)

Quadro 02 – Dados do exemplo de Euler

Regiões	Número de Pontes por Região	Ocorrências de cada região
A	8	4
B	4	2
C	4	2
D	3	2
E	5	3
F	6	3
Total		**16**

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

Soma das ocorrências de cada região = Total de Pontes + 1 = 15 + 1 = 16

Veja que, nesse caso, a comparação foi verdadeira. Logo, *existe um trajeto possível*, começando por uma região ímpar e terminando em outra região ímpar, ou seja, começamos em D e terminamos em E ou vice-versa. Na representação criada por Euler, teremos como uma possível solução, o trajeto: EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBoElD.

Se acrescentarmos uma ponte de D para E, temos a seguinte situação:

Quadro 03 – Variação do exemplo de Euler

Regiões	Número de Pontes por Região	Ocorrências de cada região
A	8	4
B	4	2
C	4	2
D	4	2
E	6	3
F	6	3
Total		**16**

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

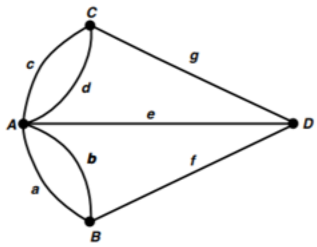
Nesse caso, a comparação com o total de pontes *não terá acréscimo de uma unidade*. Isso acontece devido ao número de pontes em cada região ser, todos, pares. Assim, devemos ter: *Soma das ocorrências de cada região = Total de Pontes* → *16 = 16*. Nesse caso, *teremos uma resposta que satisfaz o problema original*, partindo de qualquer uma das regiões e chegando na mesma.

No livro *Handbook of Graph Theory*, encontramos um fato interessante. Nele, os autores Jonathan L. Gross, Jay Yellen e Ping Zhang, fazem a seguinte observação:

> A conexão entre o problema das pontes de Königsberg e os quebra-cabeças de diagramas não foi reconhecida até o final do século XIX. Foi apontado por W. W. Rouse Ball [Ro: 1892] em Mathematical Recreations and Problems. Rouse Ball parece ter sido o primeiro a usar o gráfico da Figura 1.3.2 *(Figura 03)* para resolver o problema (GROSS, YELLEN e ZHANG, 2013, p.33). Tradução dos autores. Adaptação e grifo nosso.

A seguir, apresentamos a figura da qual os autores se referem na citação:

Figura 03 – Rouse Ball's graph



Fonte: Recorte feito pelo autor da obra digitalizada – vide Referências: GROSS et al (2013)

Deixamos registrado aqui a mudança de resultados ao problema das pontes de Königsberg, diretamente relacionada às *quantidades de pontes em cada região*. De um modo geral, *se as quantidades forem todas ímpares, não temos uma solução; se as quantidades forem todas pares, temos solução independentemente da região inicial*.

Antes de passar para a apresentação do nosso segundo pesquisador nesse breve texto, gostaríamos de destacar a riqueza da produtividade de Euler. Só para termos uma ideia do tamanho do seu legado, após ganhar o Grande Prêmio da *Académie des Sciences* de Paris, em 1738 e 1740, Euler deixa a Rússia em 19 de junho de 1741 e muda-se para Berlim, onde vai trabalhar, na Academia de Ciências de Berlim, como diretor de matemática. Nesse período, além de suas atribuições multifuncionais (desde a supervisão de trabalhos envolvendo sistemas hidráulicos, administração de produção científica, como calendários e mapas geográficos, até a função de conselheiro do governo), Euler teve uma produção científica fenomenal.

> Durante os 25 anos que passou em Berlim, Euler escreveu cerca de 380 artigos. Ele escreveu livros sobre o cálculo das variações; o cálculo de órbitas planetárias; sobre artilharia e balística (estendendo o livro de *Robins); a análise; a construção naval e navegação; o movimento da lua; palestras sobre cálculo diferencial; e uma publicação científica popular Cartas a uma princesa da Alemanha[7] (3 vols., 1768 – 72) (O'CONNOR e ROBERTSON, 1998).

Nosso segundo matemático é August Ferdinand Möbius (1790 – 1868). Astrônomo alemão, Möbius era filho de Johann Heinrich Möbius e de Johanne Katharine Christiane Keil. Nasceu em Schulpforta, distrito de Naumburg, situado na Saxônia-Anhalt, um dos cinco estados da antiga Alemanha Oriental, que foram acrescentados à atual Alemanha após sua reunificação em 1990. Möbius só frequentou a escola em 1803 (Colégio de Schulpforta). Até aqui, havia sido educado em casa. Formou-se em 1809, quando foi para a Universidade de Leipzig, onde começou a estudar Direito por influência familiar. Porém, com seis meses, percebeu que essa não era sua área de interesse, e mudou para matemática, astronomia e física. Em Leipzig, sua grande influência foi Karl Brandan Mollweide (1774 – 1825), também matemático e astrônomo

[7] Tradução dos autores. *Benjamin Robins (1707 – 1751), engenheiro inglês (nota dos autores).

alemão. Outra grande influência foi a do professor Johann Friedrich Pfaff (1765 – 1825), quando foi para a *Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg*[8], após ter estudado com Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), na época, diretor do *Universitätssternwarte Göttingen*[9] (Observatório da Universidade de Göttingen). Os caminhos de Möbius, até então, sempre incluíam matemáticos interessados em aplicar esta teoria à astronomia (O'CONNOR e ROBERTSON, 1997).

Möbius defendeu o doutorado em 1815, cujo tema era sobre a Ocultação de Estrelas Fixas, e seu trabalho de Habilitação[10] (*Habilitationsschrift*), versou sobre as Equações Trigonométricas. Em 1816, é nomeado professor extraordinário de astronomia e mecânica superior na Universidade de Leipzig e astrônomo do Observatório da mesma Universidade, com o qual esteve envolvido com sua reconstrução no período de 1818 a 1821, supervisionando seu novo projeto. Nessa época (1820), casou-se com Dorothea Rothe, com quem teve três filhos.

Möbius ascendeu ao cargo de professor titular (cátedra) de astronomia em Leipzig no ano de 1844. Em 1848, é nomeado Diretor do Observatório da Universidade de Leipzig. No ano de 1865, em um livro de memórias, descoberto após a sua morte, Möbius discute sobre Topologia e "as propriedades de superfícies unilaterais, incluindo a tira de Möbius que ele havia descoberto em 1858" (O'CONNOR e ROBERTSON, 1997).

Aqui aproveitamos para abrir um pequeno espaço para algumas informações, no mínimo, interessantes. O termo Topologia (do grego *tópos*, lugar, e *lógos*, estudo) foi utilizado, informalmente, pela primeira vez, pelo matemático alemão Johann Benedict Listing (1808 – 1882) em uma carta enviada em abril de 1836 para Johann Heinrich Müller (1787 – 1844), seu professor em Frankfurt onde ele nasceu. Formalmente, a palavra reaparece em um livro de Listing, *Vorstudien zur Topologie*, publicado em 1847. Listing diz em seu livro:

> A topologia deve, portanto, ser entendida como a doutrina das relações modais das estruturas espaciais, ou das leis de conexão, posição mútua e sucessão de pontos, linhas, superfícies; Corpos e suas partes ou seus agregados no espaço, independentemente das proporções da pintura e do tamanho. Através do conceito de sucessão, que está intimamente relacionado com o de movimento, a topologia tem uma relação semelhante com a mecânica e com a geometria, por meio da qual, é claro, a velocidade de avanço ou a velocidade angular do movimento giratório, a mesma massa, quantidade de movimento, forças ou Momentos de acordo com sua quantidade não entram em consideração essencial, mas apenas as relações modais entre estruturas móveis ou móveis no espaço.[11] (LISTING, 1848, p. 6).

---

[8] Disponível em: https://www.uni-halle.de/. Acesso em: 13 Abr. 2021.
[9] Disponível em: https://www.outdooractive.com/pt/poi/weserbergland/die-historische-sternwarte-in-goettingen/45985436/?i=45985436. Acesso em: 13 Abr. 2021.
[10] "[...] É a qualificação extra de pós-doutorado necessária para lecionar em uma universidade alemã" (O'CONNOR e ROBERTSON, 1997). Link oculto. Acesso em: 15 Fev. 2021.
[11] Tradução dos autores.

Outro fato interessante é que Listing, “em 1858, [...] descobriu as propriedades da banda de Möbius quase ao mesmo tempo, e independentemente de Möbius” (O'CONNOR e ROBERTSON, 2000). “Embora conheçamos, hoje, como uma tira de Möbius, não foi Möbius quem primeiro descreveu este objeto, em vez disso, por qualquer critério, data de publicação ou data da primeira descoberta, a precedência vai para Listing[12]” (O'CONNOR e ROBERTSON, 1997). Listing também publicou *Der Census raumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern*, em 1862, onde discute generalizações da fórmula de Euler. Mas isso é outra história... deixamos, aqui, a possibilidade de uma outra abordagem histórica mais aprofundada futuramente.

Voltando à Fita de Möbius, a mesma

> [...] é uma superfície bidimensional com apenas um lado. Pode ser construída em três dimensões da seguinte maneira. Pegue uma tira retangular de papel e junte as duas pontas da tira de forma que tenha uma torção de 180 graus. Agora é possível começar em um ponto A na superfície e traçar um caminho que passa pelo ponto que está aparentemente do outro lado da superfície de A[13] (O'CONNOR e ROBERTSON, 1997).

Vamos analisar esta característica inicial. De acordo com a nossa proposta, esta análise irá considerar, apenas, as características mais elementares apresentadas pela fita. Vamos a elas: **a)** se unirmos as duas pontas da fita Euclidiana inicial sem nenhuma torção (zero torção), teremos uma superfície Euclidiana que, se dividida ao meio, irá gerar duas superfícies com as mesmas características, como mostra a Figura 04:

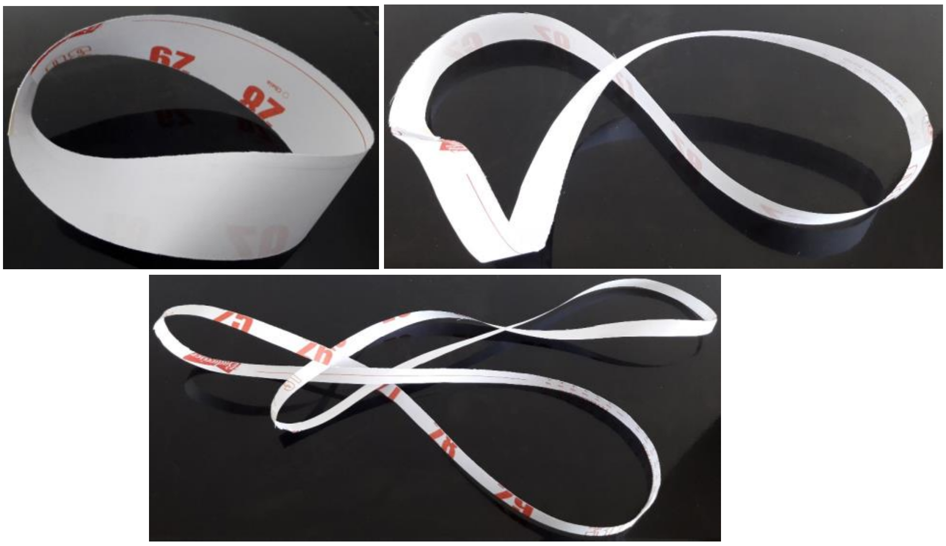
Figura 04 – Fita Euclidiana – Zero torção – inteira e dividida ao meio

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

b) se unirmos as duas pontas da fita Euclidiana inicial com uma torção, teremos uma superfície de Möbius que, se dividida ao meio, irá gerar uma única superfície, porém, com características Euclidianas, como mostra a Figura 05:

[12] Traduções dos autores.
[13] Tradução dos autores.

Figura 05 – Fita de Möbius – Uma torção – inteira e dividida ao meio



Fonte: Arquivo pessoal dos autores

Uma curiosidade é que, como a fita de Möbius, quando dividida pela primeira vez, gera uma superfície Euclidiana, quando a dividirmos novamente, esta irá gerar duas novas superfícies Euclidianas, como mostra a imagem inferior da Figura 05. Podemos dividir, teoricamente, indefinidamente estas novas superfícies, duplicando-as a cada corte. Muitos artistas utilizam esta propriedade para produzir trabalhos interessantes. Outro fato interessante é que tudo isso irá acontecer, sempre que fizermos um número ímpar de torções, como mostra a Figura 06:

Figura 06 – – Fita de Möbius – Três Torções – inteira e dividida ao meio

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

Ou seja, esta Faixa tem a seguinte propriedade: *se o número de torções for ímpar, temos uma Superfície de Möbius. Se for par, temos uma Superfície Euclidiana*. Vejam que o invariante topológico depende, também, da característica da Paridade, de mesma forma que o problema das pontes de Königsberg.

TEOREMA DA PARIDADE: O QUE É ISSO?

Na Adição: a Soma de duas parcelas pares é par. A soma de duas parcelas ímpares é, também, par. A soma de uma parcela par e uma parcela ímpar será ímpar (ou vice-versa – Propriedade Comutativa). Ou seja, *se mantemos a paridade* (duas parcelas pares ou duas ímpares) *a soma será par*. A soma será ímpar, quando não mantemos a paridade.

Na multiplicação: o produto de dois fatores pares é par. O produto de um fator par e um fator ímpar (ou vice-versa – Propriedade Comutativa) é par. O produto de dois fatores ímpares é ímpar. Ou seja, *se mantemos a paridade* (dois fatores pares ou dois fatores ímpares), *mantemos esta* (paridade) *no resultado* (produto).

MAS ISSO SERVE PARA QUÊ? – UM EXEMPLO:

O Problema das cem aves apresenta algumas versões disponíveis na rede mundial de computadores. Desde uma interpretação exposta por *Bhaskara II* ou *Bhaskaracharya* (1114 – 1185; matemático e astrônomo indiano[14]), que se utiliza de cavalos, camelos, mulas e bois, até a questão exposta "pela primeira vez, na China, no *Manual Aritmético de Zhang Quijian* [...], [o qual] também aparece nos trabalhos de Mahavira e Bhaskara[15]", o qual se utiliza de pombas, cegonhas, cisnes e pavões:

> O PROBLEMA DAS 100 AVES – Cinco pombos custam 3 moedas, sete gralhas custam 5 moedas, nove gansos custam 7 moedas, três pavões custam 9 moedas. Compre 100 aves e gaste 100 moedas (NOBRE, 2014).

Antes de resolver qualquer problema que envolva cálculos com várias variáveis, é interessante sabermos, antecipadamente, se o mesmo tem ou não solução. Assim, se analisarmos o problema proposto, vemos que:

"Sejam: *p* a quantidade de pombos, *q* a quantidade de gralhas, *r* a quantidade de gansos e *s* a quantidade de pavões" (NOBRE, 2014). Logo: queremos que: $\boldsymbol{p + q + r + s = 100}$ **(I)**. Como: 5 Pombos = 3 Moedas (M_1); 7 Gralhas = 5 M_2; 9 Gansos = 7M_3; 3 Pavões = 9M_4, onde: M_1, M_2, M_3 e M_4 são as quantidades de moedas em cada caso. Então:

$\mathbf{M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 100}$ **(II).** Temos ainda que:

$$\textbf{Pombos}\ (p) = \frac{3}{5}\mathbf{M_1};\ \textbf{Gralhas}(q) = \frac{5}{7}\mathbf{M_2};\ \textbf{Gansos}(r) = \frac{7}{9}\mathbf{M_3};\ \textbf{Pavões}(s) = \frac{9}{3}\mathbf{M_4}\ \textbf{(III)}$$

---

[14] O'Connor & Robertson, 2000. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bhaskara_II/. Acesso em: 02 Mai. 2021.

[15] PEREIRA, A. M. Q. *Equações Algébricas*: alguns episódios históricos. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores). Universidade de Lisboa. Lisboa: Faculdade de Ciências – Matemática, 2017. p. 64. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/30373/1/ulfc121576_tm_Arminda_Pereira.pdf. Acesso em: 02 Mai. 2021.

De (I) e (III), tem-se: $\frac{3}{5}\mathbf{M_1} + \frac{5}{7}\mathbf{M_2} + \frac{7}{9}\mathbf{M_3} + \mathbf{3M_4} = \mathbf{100}$ **(IV)**

Analisando (I), (II) e (IV), vemos que *p*, *q*, *r* e *s* podem assumir valores: *a) todos pares; b) todos ímpares; c) dois pares e dois ímpares; d) não podemos ter três pares e um ímpar ou três ímpares e um par; e) 5*$|M_1$*; 7*$|M_2$*, 9*$|M_3$*, pois as respostas devem ser inteiras; f) as mesmas observações (de "a" a "d") valem para* M_1, M_2, M_3 *e* M_4.

Assim, nessas condições, o problema tem solução. Logo:

$$\frac{3}{5}\mathrm{M}_1 + \frac{5}{7}\mathrm{M}_2 + \frac{7}{9}\mathrm{M}_3 + 3\mathrm{M}_4 = 100 \text{ (IV)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{189\mathrm{M}_1 + 225\mathrm{M}_2 + 245\mathrm{M}_3 + 945\mathrm{M}_4 = 31500}{315} \rightarrow$$

$$\rightarrow 189\mathrm{M}_1 + 225\mathrm{M}_2 + 245\mathrm{M}_3 + 945\mathrm{M}_4 = 31500 \text{ (V)}$$

(V) – 189.(II) → $189\mathrm{M}_1 + 225\mathrm{M}_2 + 245\mathrm{M}_3 + 945\mathrm{M}_4 = 31500$

$$-189\mathrm{M}_1 - 189\mathrm{M}_2 - 189\mathrm{M}_3 - 189\mathrm{M}_4 = -18900$$

$$\overline{000\mathrm{M}_1 + 36\mathrm{M}_2 + 56\mathrm{M}_3 + 756\mathrm{M}_4 = 12600} \textbf{ (VI)}$$

Dividindo (VI) por 4, temos: $9\mathrm{M}_2 + 14\mathrm{M}_3 + 189\mathrm{M}_4 = 3150$ **(VII)**

De (VII), confirmamos: $7|\mathrm{M}_2$, $9|\mathrm{M}_3$, pois as respostas devem ser inteiras e 3150, 189 e 14 são múltiplos de 7 e 3150, 189 e 9 são múltiplos de 9. Assim, temos: $\mathrm{M}_2 = 7x$ e $\mathrm{M}_3 = 9y$. De (VII):

$63x + 126y + 189\mathrm{M}_4 = 3150$ **(VIII)**. Dividindo (VIII) por 63, temos:

$x + 2y + 3M_4 = 50$, com $M_4 \leq 16$. Portanto:

M_4	$x + 2y = 50 - 3M_4$	x	y	M_4	$M_3 = 9y$	$M_2 = 7x$	$M_1 = 100 - M_4 - M_3 - M_2$	$p = \frac{3}{5}M_1$	$q = \frac{5}{7}M_2$	$r = \frac{7}{9}M_3$	$s = 3M_4$
16	x + 2y = 2	00	01	16	09	00	75	45	00	07	48
		02	00	16	00	14	70	42	10	00	48
15	x + 2y = 5	01	02	15	18	07	60	36	05	14	45
		03	01	15	09	21	55	33	15	07	45
		05	00	15	00	35	50	30	25	00	45
14	x + 2y = 8	00	04	14	36	00	50	30	00	28	42
		02	03	14	27	14	45	27	10	21	42
		04	02	14	18	28	40	24	20	14	42
		06	01	14	09	42	35	21	30	07	42
		08	00	14	00	56	30	18	40	00	42
13	x + 2y = 11	01	05	13	45	07	35	21	01	35	39
		03	04	13	36	21	30	18	15	28	39
		05	03	13	27	35	25	15	25	21	39
		07	02	13	18	49	20	12	35	14	39
		09	01	13	09	63	15	09	45	07	39
		11	00	13	00	77	10	06	55	00	39
12	x + 2y = 14	00	07	12	63	00	25	15	00	49	36
		02	06	12	54	14	20	12	10	42	36
		04	05	12	45	28	15	09	20	35	36
		06	04	12	36	42	10	06	30	28	36
		08	03	12	27	56	05	03	40	21	36
		10	02	12	18	70	00	00	50	14	36
	$M_4 + M_3 + M_2 \leq$ **100**	12	01	12	09	84	– 05	–	–	–	–
11	x + 2y = 17	01	08	11	72	07	10	06	05	56	33
		03	07	11	63	21	05	03	15	49	33
		05	06	11	54	35	00	00	25	42	33
	$M_4 + M_3 + M_2 \leq$ **100**	07	05	11	45	49	– 05	–	–	–	–
10	x + 2y = 20	00	10	10	90	00	00	00	00	70	30
	$M_4 + M_3 + M_2 \leq$ **100**	02	09	10	81	14	– 05	–	–	–	–
09	x + 2y = 23 $M_4 + M_3 + M_2 \leq$ **100**	01	11	09	99	07	– 15	–	–	–	–

Fica claro que, a partir de $\mathbf{M_4 = 09}$, não teremos mais respostas que satisfaçam ao problema proposto. Compare, agora, os resultados encontrados com as observações iniciais:

M_1	M_2	M_3	M_4
75	00	09	16
70	14	00	16
60	07	18	15
55	21	09	15
50	35	00	15
50	00	36	14
45	14	27	14
M_1	M_2	M_3	M_4
40	28	18	14
35	42	09	14
30	56	00	14
35	07	45	13
30	21	36	13
25	35	27	13
20	49	18	13
15	63	09	13
10	77	00	13
25	00	63	12

p	**q**	**r**	**s**
45	00	07	48
42	10	00	48
36	05	14	45
33	15	07	45
30	25	00	45
30	00	28	42
27	10	21	42
p	*q*	*r*	*s*
24	20	14	42
21	30	07	42
18	40	00	42
21	01	35	39
18	15	28	39
15	25	21	39
12	35	14	39
09	45	07	39
06	55	00	39
15	00	49	36

	Legenda
	Todos os resultados pares
	Dois pares e dois ímpares
	Todos os resultados ímpares

M_1	M_2	M_3	M_4
20	14	54	12
15	28	45	12
10	42	36	12
05	56	27	12
00	70	18	12
10	07	72	11
05	21	63	11
00	35	54	11
00	00	90	10

p	*q*	*r*	*s*
12	10	42	36
09	20	35	36
06	30	28	36
03	40	21	36
00	50	14	36
06	05	56	33
03	15	49	33
00	25	42	33
00	00	70	30

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Boa parte dos problemas propostos para se trabalhar com a Paridade, são triviais quando consideramos, em primeiro lugar, a sua possibilidade de solução ou não. Muitas vezes, essa análise já aponta a solução, quando essa é possível.

Acreditamos, então, que o trabalho com o Teorema da Paridade, apesar de ser visto como algo extremamente elementar e, por isso, subentende-se que seja um conteúdo de domínio geral, pode servir, no mínimo, como base, argumento, ponto de partida para discussões interessantes e ricas em conteúdo, principalmente, de História da Matemática. Erguemos aqui, também, a bandeira de que a formação de professores de matemática deve estar intimamente ligada com o estudo da História da Matemática, a qual resgata a importância de determinados conteúdos consideráveis para o desenvolvimento do pensamento crítico e do raciocínio lógico, fundamentais para a formação de professores. Dentre estes conteúdos, destacamos a Teoria dos Números. Concluímos nossos apontamentos com as observações da Dra. Rina Zazkis, Diretora de Pesquisa do Canadá em Ensino e Aprendizagem de STEM[16]:

> Tarefas elementares da teoria dos números são área rica e acessível para aprimorar e sondar [itálico] o fazer e o sentido matemático dos alunos". Como tal, a utilidade da

[16] "STEM é a sigla em inglês para *Science, Technology, Engineering* e *Mathematics* (Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática, em português). A ideia original é unir conhecimentos dessas quatro áreas em torno da construção de algo que resolve o desafio proposto". Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/11683/o-que-e-o-stem-e-como-ele-pode-melhorar-a-sua-aula. Acesso em: 16 Fev. 2021.

> teoria dos números foi argumentada para ensino e aprendizagem de matemática e realização de pesquisas em educação matemática. [...] Além disso, para os alunos, a utilidade adicional de experimentar a teoria dos números reside em desenvolver uma apreciação pela beleza e poder da matemática. É onde os papéis de Servo e Rainha se sobrepõem e se confundem. [...] Gauss referiu-se à teoria dos números como a "Rainha da Matemática". O próprio Gauss é conhecido como um gigante matemático e muitas vezes referido como o "Rei da Matemática". O poder e a utilidade de experimentar a teoria dos números estão no desenvolvimento da habilidade de "trabalhar como um matemático" - conjeturar e testar conjecturas - onde o mistério ainda não resolvido de propriedades e relações espera por novos Reis[17] (ZAZKIS, 2009, p. 13-14)

Fica, aqui, nosso estímulo e convite, para que professores e alunos conquistem, também, sua coroa, forjada em conhecimentos dos *Por que?* e prazer em aprender e apreender os *Para quê?*. Estes são os grandes sentidos do conhecimento! Como diz o professor Luiz Barco: "a topologia interessa muito ao matemático, ao grande pesquisador, ao físico, ao químico, interessa muito ao homem comum que vai admirar uma obra de arte[18]".

REFERÊNCIAS

EULER, L. **Solutio problematis ad geometriam situs pertinentes**. 1736. Disponível em: https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1052&context=euler-works. Acesso em: 12 Fev. 2021.

GROSS, J. L.; YELLEN, J.; ZHANG, P. **Handbook of Graph Theory**. Chapter1, Section 1.3. History of Graph Theory. 2013. p. 31 – 51. Disponível em: https://www.routledgehandbooks.com/pdf/doi/10.1201/b16132-3. Acesso em: 12 Fev. 2021.

LISTING, J. B. **Vorstudien zur Topologie**. Reimpresso a partir dos estudos de Göttingen. 1847. Göttingen perto de Vandenhoeck e Ruprecht. 1848. p. 6. Disponível em: https://play.google.com/books/reader?id=12cLAAAAYAAJ&hl=pt&pg=GBS.PP6. Acesso em: 16 Fev. 2021.

LOPES, F. J. A.; TÁBOAS, P. Z. **Euler e as Pontes de Königsberg**. Revista Brasileira de História da Matemática. Vol. 15, nº 30, 2015. p. 23 – 32. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/82/56. Acesso em: 12 Fev. 2021.

NOBRE, S. R. O problema das 100 aves. In: **Revista do Professor de Matemática**. V. 85. Ano 32. 2014. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/85/1.html. Acesso em: 15 Fev. 2021.

O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E.F. **Johann Benedict Listing**. Licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License. School of Mathematics and Statistics University of St. Andrews, Scotland. 2000. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Listing/. Acesso em: 11 Fev. 2021.

[17] Tradução dos autores.

[18] Série "Arte & Matemáica". Episódio 11 – Forma Que Se Transforma. Link disponível em: https://pt.wikiversity.org/wiki/Portal:Matem%C3%A1tica_e_Estat%C3%ADstica/Videoteca. Acesso em: 04 Fev. 2021.

O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E.F. **Leonhard Euler**. Licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License. School of Mathematics and Statistics University of St. Andrews, Scotland. 1998. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler/. Acesso em: 08 Fev. 2021.

O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E.F. **August Ferdinand Möbius**. Licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License. School of Mathematics and Statistics University of St. Andrews, Scotland. 1997. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mobius/. Acesso em: 14 Fev. 2021.

SILVA, A. M. da. **Rá-Tim-Bum – Senta, Que Lá Vem a História**. Trabalho apresentado ao Expocom, na divisão temática de Comunicação Audiovisual do XIV Congresso de Ciências da Comunicação na Região Sudeste. 2009. Disponível em: http://www.intercom.org.br/papers/regionais/sudeste2009/resumos/R14-0337-1.pdf. Acesso em: 16 Fev. 2021.

ZAZKIS, R. **Number Theory in Mathematics Education**: Queen and Servant. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 8,1, 2009. p. 13-14. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Rina_Zazkis/publication/273773087_Number_Theory_in_mathematics_education_Queen_and_Servant/links/550c72970cf2ac2905a40f0d/Number-Theory-in-mathematics-education-Queen-and-Servant.pdf. Acesso em: 16 Fev. 2021.