RHMP
REVISTA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

**ISSN**: 2317-9546 ***e*-ISSN**: 2675-715X



# DE GALOIS A BOURBAKI, PASSANDO POR FELIX KLEIN: IMPLICAÇÕES PEDAGÓGICAS[1]

**Ubiratan D'Ambrosio** (UNICAMP)
ubi@usp.br

> "Não posso dissimular quanto está acima de minhas forças fazer um estudo completo da obra e do gênio de Galois. Eu espero, portanto, que vocês me perdoem se eu falar quase somente das áreas da matemática com as quais minhas pesquisas pessoais me tornaram, em alguma medida, familiarizado." Sophus Lie (1895)[2]

Com maior razão que Sophus Lie, está acima de minhas forças e competência falar da teoria de Galois. Conforme a expectativa dos organizadores que me honraram com este convite, falarei sobre Educação e sobre História. Justifico essas duas vertentes.

Aprendi muito de Imre Lakatos (1922-1974) e fui particularmente influenciado pela sua frase antológica:

> "A história da matemática sem ser guiada pela filosofia, tornou-se cega, enquanto a filosofia da matemática ao voltar suas costas para a história da matemática tornou-se vazia."[3]

Ao longo de minha carreira percebi que as reflexões sobre educação devem ser sempre atreladas à história, e expresso-me dizendo que

> "Educação sem ser ancorada na História é uma pregação sem fundamentos, enquanto a História sem ser inserida na Educação é inconclusa."

Vou, portanto, falar em História e Educação, as áreas da matemática com as quais me sinto mais à vontade.

## Évariste Galois: o político e o matemático

Évariste Galois nasceu no dia 25 de outubro de 1811, em uma família de classe média, na cidade de Bourg-la-Reine, na periferia de Paris e morreu em Paris no dia 31 de maio de 1832,

---

[1] Simpósio *Gênese do Pensamento Moderno em Matemática: Galois 200 anos*, promovido pela "10ª Edição do Programa de Verão – Matemática UFPR", no Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, em Curitiba, 2011.
[2] Sophus Lie, Influence de Galois sur le déveoppement des mathémaeiques, in *Le centenaire de lÉcole normale 1795-1895*, Hachette, Paris, 1895.
[3] Imre Lakatos. *Proofs and Refutations*, Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

em conseqüência de um duelo mal explicado. Com 18 anos, já com idéias políticas, havia assistido, recluso em sua escola, as batalhas de rua que destronaram Carlos X e conduziram Luis Felipe, da dinastia Orléans, ao poder. Logo Galois visitou a família e para surpresa deles, revelou seu radicalismo político, dizendo que o povo havia sido traído e que ele estava disposto a lutar. Disse ainda que se fosse suficiente um corpo para incitar o povo à revolta, ele ofereceria o seu. A partir de então, a política torna-se essencial na sua vida. Torna-se rapidamente conhecido e em menos de dois anos morre num duelo, oferecendo seu corpo em sacrifício, em circunstâncias pouco explicadas.

O jovem matemático Évariste Galois, que em 1827, com 16 anos, já havia obtido resultados profundos na matemática, mas que, embora alguns tenham sido publicados, não foram compreendidos, sendo considerados de uma redação obscura. Na noite precedendo sua morte, redigiu rapidamente seus resultados, que só foram publicados em 1846.

O reconhecimento tardio da importância de seus resultados geniais, associado a circunstâncias românticas de sua vida tão breve e morte tão misteriosa foram combinados por historiadores, criando o mito Evariste Galois. Logo esse mito chegou ao interesse popular. Há peças de teatro, novelas e filmes, inclusive longa metragem, sobre ele. Lamentavelmente, o mito inseriu-se em respeitadas histórias da matemática.

O nome Évariste Galois é, matematicamente, identificado com a teoria dos grupos. A idéia de grupo foi fundamental no tratamento que Galois deu às equações algébricas. No seu principal trabalho, Galois escreve:

> “quando quisermos agrupar as substituições, nós fazemos com que todas venham de uma mesma permutação ... devemos ter as mesmas substituições, qualquer que seja a permutação da qual partimos ...Portanto, se num grupo assim tivermos as substituições S e T, estamos seguros de ter a substituição ST.”[4]

Assim nasce a ideia que floresceria como uma das principais teorias matemáticas.

A partir da ideia inicial de Galois sobre o conceito de grupos, motivada pela resolução de equações algébricas, a teoria de grupos desenvolveu-se durante o século XIX e início do século XX. Hoje é central em todas as áreas da matemática e das ciências, particularmente na física e na química quânticas. Como chegou a essa posição, inclusive na educação, será discutido mais adiante neste trabalho.

[4] *Journal de mathématiques pures et appliquées (Journal de Liouville)*, Tome XI, année 1846, p.419.

**Resolução de equações**

Resolver equações está nos primeiros registros escritos que temos de matemática, que são das civilizações do Egito e da Babilônia, no Ocidente, e da Índia e da China no Oriente. As equações estão ligadas à resolução de problemas, motivados por situações do cotidiano, e por questões aritméticas e geométricas, por mera curiosidade ou como exercícios.[5]

Quem detinha as artes e técnicas para essas resoluções eram escribas, uma classe de servidores do poder. Havia o que podemos chamar Educação Matemática para a formação desses servidores. Muitos problemas da época são, claramente, exercícios para a formação de escribas.[6]

A ideia de resolver problemas, na forma de equações, está presente na matemática grega, tanto na vertente popular quanto na vertente acadêmica, que praticava o estilo Euclidiano. Ambas as vertentes se diferenciam, embora haja pontos comuns, adotando conceitos de Aritmética e de Geometria estão presentes. Reconhece-se também uma Educação Matemática no mundo grego, praticada diferentemente em academias e em agremiações profissionais e famílias. O livro clássico *De Architectura*, de Marcus Vitruvius Pólio (séc I a.C.) inclui um estudo sobre o currículo para a formação de engenheiros.[7] Os romanos privilegiaram a vertente popular, embora a vertente acadêmica fosse conhecida dos romanos, como mostra claramente o livro de Vitruvius. Mas a vertente acadêmica, no estilo Euclidiano, simplesmente não interessava aos romanos e era negligenciada, embora respeitada. Academias gregas, particularmente a de Alexandria, e matemáticos de cultura grega, na verdade cidadãos romanos, continuaram ativos. Destacam-se Ptolomeu (85-165), Diofante (século III), Papus (290-350), Theon (?335-?405) e Hipatia (*ca*355-415). O assassinato de Hipatia e a destruição da Biblioteca de Alexandria pelos cristãos marcam uma mudança radical. Com o advento do cristianismo, a vertente acadêmica rejeita a Filosofia e a Matemática gregas e surgem os mosteiros, nos quais a organização do conhecimento mantém em foco a Aritmética (números) e a Geometria (formas), além da Música (números em relação) e da Astronomia (formas em movimento), constituindo o *quadrivium*.

A grande inovação veio com o Islamismo e a introdução, por al-Karizmi[8] , de um método para resolver equações, baseado em duas técnicas, a *al-jabr* (transpor o sinal =) e *al-muqabala* (reduzir termos semelhantes). Essas inovações foram difundidas na Europa a partir

---

[5] B. L. van der Waerden: *Geometry and Álgebra in Ancient Civilizations*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
[6] Algo semelhante ocorre na Índia e na China e nas civilizações pré-colombianas.
[7] Vitruvius. *The ten books on architecture*, tansl. Morris H. Morgan,Harvard University Press. Cambridge, 1914.
[8] Abū ‘Abd Allāh Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (*ca*780 - *ca*850).

da publicação do *Líber Abaci* (1202), por Leonardo de Pisa (*ca*1180-1250), o Fibonacci. Nas traduções surge a palavra álgebra como um método ou a arte de reduzir e resolver equações sobre números e formas, isto é, de Aritmética e de Geometria. Esse caráter da álgebra ser um método é claramente reconhecido por Pedro Nunes (1502-1578) ao dar o título de *Libro de Álgebra en Arithmética y Geometria* (1576) ao seu curso de Álgebra. O "en" no título não deixa dúvida que as disciplinas são Aritmética e Geometria, e que álgebra é não mais que um método de resolver equações. A idéia de que resolver uma equação é uma arte é evidente nas publicações. A palavra aparece às vezes até nos títulos, como por exemplo Robert Record (1510-1558), ensinando a resolver problemas práticos no seu *Grounde of Artes* (1541), e para equações de grau superior, em Girolamo Cardano (1501-1570) e seu *Ars Magna* (1545), em François Viète (1540-1603) e a *Artem Analyticem Isagoge* (1591). Escolhi esses exemplos para enfatizar o caráter de arte ou técnica que se buscava no que hoje chamamos álgebra. Naturalmente, a palavra álgebra é, hoje, conceitualmente diferente, como veremos adiante. O insucesso na busca de uma fórmula para resolver equações de grau cinco mudou o foco no estudo de equações. A pergunta dominante passou a ser "há solução para equações de grau superior?". Outra questão é "será possível encontrar uma fórmula, incluindo radicais, para achar uma solução?". De fato, esse mesmo tipo de raciocínio surge na análise, quando critérios de convergência de séries e teoremas de existência de soluções de equações diferenciais começam a ser questões de fundamental importância. Naturalmente, o mesmo se dá com equações algébricas. Um avanço decisivo nesse novo enfoque foi o que viria a ser chamado o Teorema Fundamental da Álgebra (Gauss, 1799):

> "Toda equação do tipo $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} +...+ a_1x + a_0 = 0$ com coeficientes complexos e $n>0$ tem n raízes complexas."

**O cenário político europeu na transição do século XVIII para o século XIX**

A ciência do século XVIII foi marcada pela chamada revolução científica, principalmente pela publicação do *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis* (1687), por Isaac Newton (1642-1726), que culminou um novo pensar científico, passando por Galileo Galilei (1564-1642), Johannes Kepler (1571-1630), René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665) e muitos outros. Surge uma nova matemática de suporte, o Cálculo Diferencial e Integral, inventado por Newton e, simultânea e independentemente, por Gottfried Wilhem Leibniz (1646-1716). Uma importante consequência foi a revolução industrial [marcada pela invenção da máquina a vapor, em 1775, por James Watt (1736-1819)], que juntamente com a invenção da agricultura e com a ocupação territorial urbanizada, caracterizaram a civilização atual. Igualmente importante foi a influência social da obra de

Newton, o chamado Iluminismo. Uma idéia implícita nesse novo pensar é a rejeição do absolutismo monárquico e um retorno ao ideal republicano. Isso foi realizado pela Revolução Americana, em 1776, e pela Revolução Francesa, em 1789. Na verdade, por todos os países que se tornaram independentes nas colônias americanas, com a exceção do Brasil, rejeitaram a monarquia.

No caso da França, a transição para República foi marcada por inúmeros percalços. A Revolução Francesa em 1789 resultou na proclamação da Primeira República, em 1792. Em meio a grandes disputas políticas por várias facções revolucionárias, outras monarquias europeias entraram em guerra contra a nova França, cujo ideal republicano representava uma ameaça à estabilidade das monarquias. O General Napoleão Bonaparte resiste aos ataques e recompõe a estabilidade política e em 1799 assume o poder. De índole absolutista, faz-se coroar Imperador da França em 1804, sob o título de Napoleão I. A derrota contra a Rússia, em 1812, inicia o declínio de Napoleão. Em 1815 foi restaurada a dinastia Bourbon, com Luis XVIII, que reinou até sua morte, em 1824, sendo sucedido por seu filho, Carlos X. Em 1830, uma revolta popular, liderada pela burguesia e por republicanos, resulta na deposição de Carlos X. Essa revolta de três dias (27-28-29 de julho), caracterizada pelas barricadas e batalhas de rua e retratada na novela *Os Miseráveis,* de Victor Hugo, foi chamada de "três dias gloriosos" e resultou na deposição de Carlos X e no fim da dinastia Bourbon. Após destronar os Bourbons, a alta burguesia financeira manipulou o poder pós-revolucionário e levou ao poder Luís Felipe, da dinastia Orléans, chamado o "Rei Burguês", que permaneceu até 1848. Com um discurso liberal, o Rei Luis Felipe pretendeu o apoio da classe média, mas rapidamente foi aumentando os privilégios das grandes corporações financeiras e reprimindo a oposição. O descontentamento culminou com sua deposição em 1848 e mais uma tentativa de tornar a França uma República. O resultado foi a proclamação da Segunda República Francesa, que teve duração efêmera (1848-1852), quando Charles Louis Napoléon Bonaparte (1808-1873) foi proclamado, novamente com apoio da alta burguesia financeira, Imperador Napoleão III. Permaneceu no poder até 1870, quando foi deposto e foi proclamada a Terceira República Francesa, que permaneceu até 1940.

É nesse ambiente político que nasceu e viveu Évariste Galois. Nasceu no dia 25 de outubro de 1811, na cidade de Bourg-la-Reine, nas proximidades de Paris. Seu pai, Nicolas-Gabriel Galois era um homem culto, que havia aderido à Revolução de 1789 e era bonapartista. Era diretor de uma escola da família e quando Luis XVIII restaurou a monarquia, em 1815, foi convidado a permanecer no posto. Sua mãe, Adelaide-Marie, era possuidora de grande erudição, especialista em letras clássicas.

## Évariste Galois, seu envolvimento político e sua morte

Évariste foi educado por sua mãe até seus 12 anos, quando foi matriculado no prestigioso *Lycée Louis-le-Grand*, fundado em 1563. Ali seus estudos foram conturbados. Seu aproveitamento era irregular. Seus estudos de matemática eram indisciplinados, mas iam muito além das aulas, pois lia intensamente e com facilidade renomados autores, como Legendre, Lagrange, Cauchy, Gauss, Abel. Sua ambição era entrar na *École Polytechnique*, a mais prestigiosa e cobiçada instituição de ensino superior. Fez uma tentativa de admissão, sem sucesso. Há controvérsias sobre esse exame, apontando para injustiça dos examinadores, mas também para a rebeldia e irreverência do jovem Galois.

A morte de seu pai, em 1829, chocou profundamente Evariste. Uma intriga que atentava contra sua honra foi forjada, o que levou Nicolas-Gabriel ao suicídio. Evariste ficou profundamente chocado com a morte do pai. Aumentou ainda sua depressão o fato de poucos dias depois, receber a notícia que não havia passado na sua segunda tentativa de entrar na *École polytechnique*. Mais uma vez, há controvérsias sobre sua reprovação. Como não era possível mais que duas tentativas, Galois tirou a *École polytechnique* de seus planos e decidiu tentar uma instituição menos prestigiosa, que era a *École préparatoire*, criada em 1826. Essa escola, controlada por religiosos, substituiu a *École normale*, fundada em 1795. A *École normale* destinada a formação de professores para a escola secundária havia sido extinta em 1822 por ser excessivamente liberal, mas viria a ser restaurada, em 1830, novamente com o nome original de *École normale*. Com alguma dificuldade, Galois entrou na *École préparatoire*, que exigia dos alunos um compromisso de lecionar nas escolas públicas por dez anos. Ele assinou o compromisso. Na *École préparatoire*, ele conheceu o colega Auguste Chevalier, que se tornaria seu melhor amigo. O irmão de Auguste, Michel Chevalier (1806-1879), formou-se na *École Polytechnique* e foi um destacado político.[9] Auguste e Michel eram seguidores das idéias socialistas do Conde de Saint-Simon e tiveram grande influência nas ideias políticas de Galois.

Na *École préparatoire* assistiu, de seu quarto, os movimentos de rua dos “três dias gloriosos” de julho de 1830. Querendo participar do movimento, tentou sair de seu quarto, onde estava recluso pelo diretor da escola, pulando os altos muros, mas não teve sucesso. Terminada a revolta voltou à sua casa, onde revelou suas tendências políticas, como mencionei no início deste trabalho.

[9] Enviado ao México e aos Estados Unidos, é atribuída a ele a denominação América Latina para distinguir os Estados Unidos dos demais países do Novo Mundo.

Republicano ardente, Galois sempre foi um aluno rebelde. Na revolta de julho de 1830 afiliou-se a um grupo republicano radical, a *Société des Amis du Peuple* . Destacou-se como membro do grupo. Em janeiro de 1831 foi expulso da *École préparatoire* sob o argumento de ter enviado a um jornal dos estudantes, a *Gazette des écoles*, uma carta ofensiva contra o diretor da escola. Embora negando a autoria, a expulsão foi mantida. Curiosamente, uma carta, também forjada, havia levado seu pai, Nicholas-Gabriel, ao suicídio. Fora da escola, Galois alistou-se na *Gard nationale*, uma espécie de milícia popular, formada quase exclusivamente de republicanos. No dia 09 de maio de 1831, a *Société des Amis du Peuple* organizou um banquete em apoio à Guarda Nacional, que havia sido submetida a uma reorganização. Nesse banquete, Galois ergue um brinde a Luis Felipe, segurando a taça de vinho em uma das mãos e um punhal na outra. Houve pânico entre os presentes, como relata Alexandre Dumas que estava no banquete. De fato, no dia seguinte Galois foi preso, sob a acusação de incitar o assassinato do rei. Foi enviado à prisão de Sainte-Pélagie, de onde escreve ao seu amigo Chevalier comentando sobre o evento e dizendo que "as brumas de álcool tinham me removido a razão." Seu advogado consegue libertá-lo.

Logo em seguida, nas comemorações de 14 de julho, Galois liderou um grupo de manifestantes e estava, simbolicamente, armado. Foi novamente preso e enviado para Sainte-Pélagie. Sua sentença era prisão até abril de 1832. Em 16 de março de 1832, devido a uma epidemia de cólera, Galois foi transferido para uma clínica. Lá conheceu Stéphanie, filha de seu médico, e apaixonou-se por ela. Houve reciprocidade? Nenhuma evidência. Há alguns indicadores da recusa de Stephanie. Seu desapontamento com essa recusa aliou-se ao desapontamento com a rejeição de seus trabalhos matemáticos.

Foi libertado da prisão no dia 29 de abril de 1832. Voltou às suas atividades políticas em uma reunião, no dia 07 de maio, organizada pela *Société des Amis du Peuple*. Ali foi feita uma proposta para deflagrar uma revolta para impedir a volta dos Bourbon, que estava sendo articulada. É irrelevante, mas curiosa, a mera suposição que Augustin-Louis Cauchy, que estava no exílio e era um importante bourbonista, estivesse envolvido nessa articulação. A proposta decidida nessa reunião foi que a revolta seria deflagrada a partir da morte de um republicano conhecido, capaz de inflamar o povo, e que seria atribuída aos apoiadores de Luis Felipe. Galois voluntariou-se para essa missão de sacrificar-se pela causa. Iria enfrentar um amigo em um duelo, no qual apenas o revólver do seu opositor estaria carregado. O plano era Galois escrever, na noite anterior ao duelo, duas cartas, como de fato escreveu, mostrando o duelo como sendo real, mas em uma linguagem confusa, sugerindo uma trama. De acordo com o planejado, os membros da *Société* espalhariam que o duelo foi, na verdade, uma armação para matá-lo. Isso deflagraria a revolta popular.

O duelo de fato ocorreu, conforme o que havia sido planejado, no dia 30 de maio de 1832, perto da lagoa Glacière, no bairro de Gentilly. Quem foi seu adversário? Quem era o parceiro desse plano? L.D. Isso leva a muitas suposições. O que aconteceu após o duelo? Todos se foram e ele ficou ferido, até ser encontrado por um transeunte e levado, gravemente ferido, ao hospital Cochin, onde morreu no dia seguinte. Seu irmão foi imediatamente para lá, e Evariste apenas teria dito ao irmão "Não chore. Eu preciso muita coragem para morrer com vinte anos."

No dia do enterro, a multidão começou a se aglomerar. Mas ao mesmo tempo foi espalhada a notícia do falecimento de Jean Maximilian Lamarque, um conhecido bonapartista, herói das guerras napoleônicas e membro do Parlamento. As demonstrações populares por motivo dessa morte ofuscaram e esvaziaram as demonstrações pela morte de Galois. As demonstrações em torno do sepultamento de Lamarque resultaram em uma grande revolta popular. Nessa versão, em que a morte de Galois tem todas as características de um suicídio, sua morte foi em vão.

Na revolta popular, originada pela morte de Lamarque, repetiu-se a estratégia das barricadas nas ruas, focalizada na novela *Os Miseráveis*, de Victor Hugo. Mas a revolta foi rapidamente sufocada e Luis Felipe continuou no poder, governou tranquilamente e seu reinado é considerado o período áureo das grandes fortunas francesas. Banqueiros e industriais consolidavam seu poder, mas a crescente dureza na repressão ao descontentamento da classe média levou à revolução de 1848.

Em outras versões sobre a morte de Évariste Galois, o duelo teria sido devido a uma rivalidade amorosa envolvendo Stéphanie. Um rival amoroso, parte do mesmo círculo de amizades, teria duelado com Galois. Ou, em uma outra versão, Stephanie teria sido uma agente do governo, articuladora da trama para assassiná-lo, por razões políticas ou amorosas. Assim o mito em torno de Galois floresceu.

Sua primeira biografia foi publicada, no mesmo ano de sua morte, por seu amigo Auguste Chevalier, na forma de uma *Necrologie*. É pouco divulgada, embora retrate muito bem a personalidade atormentada de Galois; Ele havia escrito, no dia 25 de maio, cinco dias antes de sua morte, uma carta a seu amigo, na qual dizia:

> "Meu bom amigo, há prazer em ser triste só para ser consolado; pode-se ser verdadeiramente feliz de sofrer quando se tem amigos."

Após muitas reflexões de natureza filosófica, termina a carta evidentemente dissimulando seu plano:

> "Eu vou te ver no 1º de junho. Eu espero que possamos nos ver com frequência durante a 1º quinzena de junho. Eu partirei cerca de 15 de junho para Dauphiné.
>
> Tudo para ti (*Tout à toi*), E. Galois"

No necrológio, Chevalier diz que no fim de junho, a mãe de Galois entregou-lhe tudo que Galois havia deixado como escritos, inclusive uma carta com instruções para ser enviada para a *Revue encyclopédique* e vários manuscritos, todos misturados, rabiscados. Chevalier encaminhou a carta com o resumo das memórias, que Liouville chamou *"sorte de testament scientifique"*, e que foi publicada, na seção *Sciences*, com um interessante e elogioso prefácio escrito pelos redatores da revista[10]. No mesmo número, na seção *Necrologie,* August Chevalier publicou uma biografia de Galois, com muitos comentários sobre as angústias de Galois e seus esforços para dissimular o plano de seu sacrifício pela causa.[11]

Evidenciando as angústias de Galois, Chevalier cita uma frase dita ou escrita por ele em alguma ocasião:

> "A criança do pobre, martirizada por seu gênio, o coração comprimido, os braços atados, a cabeça em fogo, avança na vida, de queda em queda, ou melhor de suplício em suplício, em direção ao necrotério ou ao cadafalso."

Dentre os manuscritos que recebeu da mãe de Galois, encontro um papel solto com uns versos que mais parecem inscrições para uma lápide:

> "O eterno cipreste te cerca; Mais pálido que o pálido outono,
> Tu te inclinas para a tumba."

Chevalier conseguiu organizar, razoavelmente "decifrados", os manuscritos dados para ele e em 1843, entregou-os a Joseph Liouville, que os publicou em 1846.

A primeira biografia mais conhecida de Galois foi escrita por Paul Dupuy, *La Vie d'Evariste Galois,* e publicada nos *Annales de l'Ecole Normale*, vol.13, pp.197-266 (1896). Curiosamente, essa biografia só foi publicada após a comemoração do centenário da escola, quando Galois foi homenageado por Sophus Lie.

Há poucas e vagas referências a Galois nas memórias dos contemporâneos Alexandre Dumas e François-Vincent Raspail e em alguns noticiários de jornais. Todas muito contraditórias e deixando margem para muitas interpretações.

---

[10] Travaux mathématiques d'Évariste Galois, *Revue Encyclopédique*, tome 55, septembre 1832, pp.566-576.
[11] Evariste Galois, Necrologie. *Revue Encyclopédique,* tome 55, septembre 1832, pp.744-754.

## Uma nota historiográfica: criação de mitos

A apropriação dessas notícias pelo respeitado historiador Eric Temple Bell[12] alimentou o mito Galois, dando origem a novelas, obras de teatro e filmes. Algumas cartas e notas esparsas constituem a documentação disponível. A biografia de Bell tornou-se a mais conhecida e usada como referência.

Muitas obras surgiram sobre Évariste Galois. Há peças de teatro, novelas e filmes, inclusive longa metragem, sobre ele. Em um livro geral, sobre o universo, o físico Freeman J. Dyson[13] usa a versão de Bell sobre a noite que precede o duelo. O astrofísico Fred Hoyle[14], também em um livro gwral, usa a versão de Bell. Outras biografias romantizadas surgiram. O físico Leopold Infeld[15] atribui a morte de Galois a uma conspiração para eliminar o mais perigoso dos republicanos, utilizando uma mulher como agente provocadora. E também novelas, como a de John Sommerfield, que tem um personagem fictício, Roger Constant, cuja vida é a de Galois na versão de Bell e que se envolve com uma mulher.[16] Acreditei ser interessante citar as referências 13 a 16, mesmo não as tendo consultado. Tive notícia delas no excelente e cáustico artigo de Tony Rothman, premiado com o prestigioso *Ford Writing Award* da *Mathematical Association of America*[17].

Rothman tece duríssimas críticas a Bell e aos que nele se apoiaram. Mas Galois é uma personagem fascinante, e o ambiente em que viveu, tanto do ponto de vista político quanto do ponto de vista matemático, é igualmente fascinante, Como fazer história sem se envolver com o personagem e com a época e dar um espaço para fantasia? Rothman consulta exaustivamente fontes e aponta erros que considera inadmissíveis mesmo na fantasia. Chega a dizer

> "Dois físicos altamente respeitados [Dyson e Hoyle] e um igualmente bem conhecido matemático [Bell], membros da profissão que mais alto proclama sua devoção à verdade, inventaram história .... É um mito baseado numa incompreensão do método com o qual um cientista trabalha: como se uma grande teoria pudesse ser escrita coerentemente em uma só noite"(p.102).

Na preparação deste trabalho, o estudo de Laura Toti Rigatelli, equilibrado e bem documentado, foi-me muito útil.[18] Mas todas as minhas interpretações foram a partir de fontes

[12] Eric T. Bell, *Men of Mathematics* , New York: Simon and Schuster, 1937, particularmente p.375.
[13] Freeman Dyson, *Disturbing the Universe* (New York: Harper and Row, 1979.
[14] Fred Hoyle, *Ten Faces of the Universe* (San Fransico: W.H. Freeman, 1977
[15] Leopold Infeld *Whom the Gods Love: The Story of Evariste Galois* (New York: Whittlesey House, 1948.
[16] John Sommerfield,T*he Adversaries*, London:Heinemann, 1952.
[17] Tony Rothman: Genius and Biographers: The Fictionalization of Evariste Galois, *American Mathematical Monthly*, **89**/84 (1982), pp.84-106.
[18] Laura Toti Rigatelli. *Évariste Galois 1811-1832*. Bikhäuser Verlag, Basel, Vita Mathematica vol. 11, 1996.

originais que pude acessar, pois muitas estão digitalizadas. Nessas interpretações posso ter incorrido em fantasias. Mas como fazer história imune à fantasia?

## Évariste Galois, o matemático

Não me compete falar sobre a obra matemática de Galois. Ela foi apresentada por ele num total de cerca de 60 páginas, publicadas como cinco pequenos trabalhos e mais uma memória, um pouco mais longa, que só foi publicada postumamente, 14 anos após sua morte.

Em uma carta ao seu amigo Auguste Chevalier, escrita na noite precedendo sua morte, Galois sintetizou todas as suas idéias, inclusive algumas sobre as quais não chegou a elaborar.

Seus trabalhos são de difícil compreensão e tiveram trajetória conturbada. Um deles deveria ter sido relatado por Cauchy na sessão de 18 de janeiro de 1830, na *Académie des Sciences*, mas ele não pode comparecer à sessão e disse que relataria essa memória na próxima sessão. Mas na sessão seguinte, Cauchy simplesmente silenciou sobre o assunto. Daí, segundo Rothman[19], criou-se o mito que Cauchy esqueceu ou perdeu ou mesmo intencionalmente destruiu o trabalho. Há, porém, indicadores da possibilidade de o próprio Cauchy ter aconselhado Galois a reencaminhar essa memória visando, um importante prêmio da própria *Academie des sciences*. Apesar de grandes nomes estarem concorrendo, Galois foi encorajado a enviar o trabalho. Por alguma razão, o matemático Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) levou o trabalho para casa e pouco depois, no dia 16 de maio, faleceu. O trabalho foi perdido e não se falou mais nele. Galois atribuiu a perda a razões políticas.

Sobre os trabalhos que foram publicados, a opinião de Poisson e de outros é que eles eram incompreensíveis. É interessante fazer uma comparação dos percalços, muito semelhantes, que teve Joaquim Gomes de Souza ao submeter seus trabalhos à *Academie des sciences*.

A história de Galois está ligada à história de publicações científicas na França, pois seus trabalhos foram publicados em revistas que têm, em si, uma história característica da emergência das publicações científicas especializadas. As duas revistas em que suas cinco notas científicas, totalizando 18 páginas, foram publicadas são os periódicos conhecidos como *Annales de Gergonne* e *Bulletin de Férussac*.

Galois teve dois trabalhos publicados nos *Annales de Gergonne*, o nome pelo qual ficou conhecida a revista *Annales de mathématiques pures et appliquées*, fundada em 1810 pelo matemático Joseph Diaz Gergonne (1771-1859), com o principal objetivo de publicar seus

[19] Tony Rothman, *op.cit.*

próprios trabalhos. Seu último número foi em 1832. Nesta revista foram publicados artigos de matemáticos importantes, principalmente os trabalhos de Jacques Charles François Sturm (1803-1855).

Era prática de Gergonne fazer preceder o título do artigo com a área da matemática onde ele se insere. O primeiro trabalho publicado por Galois foi

> Analyse algébrique. Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, Avril 1829, vol. XIX, pp. 294-301.

Galois publicou ainda, na mesma revista, o trabalho

> Analyse transcendante. Notes sur quelques points d'analyse, *Annales de mathématiques pures et appliquées* , Decembre 1830, vol. XXI, pp.182-184.

Por um erro do próprio Gergonne, o autor deste trabalho aparece como "M. Galais, élève à l' École Normale". Curiosamente, nesse mesmo número da revista foi publicado o longo artigo "Par M. J. Liouville, élève ingénieur des ponts et chaussées" intitulado "Analyse Appliquée. Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur", pp.133-181. Este é o trabalho que imediatamente precede o de "Galais".

Publicou ainda três notas, que o próprio Galois considerou muito importantes, no *Bulletin de Férussac.* Esta revista tem uma história interessante. O Baron André Étienne Justin Pascal Joseph François d'Audebert de Férussac (1786–1836), era um naturalista de destaque e, politicamente, muito ativo. Tornou-se parlamentar e, em 1823, fundou uma revista, tipo enciclopédia em permanente atualização, incluindo notícia sobre outras publicações. Dá uma visão panorâmica sobre o que estava acontecendo nas ciências em toda Europa. Dá a impressão de ser um "diário oficial" sobre os avanços da ciência e da indústria, o que era de interesse nacional. A revista era intitulada *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques "sous la Direction de M. Le B*$^{on}$ *de Férussac".* Os cientistas mais importantes da época publicaram na revista, que passou a ser conhecida simplesmente como *Bulletin de Férussac*. Alguns tomos foram reimpressos e a história dessa publicação é um tema de muito interesse. Ali Galois publicou três trabalhos:

> Analyse d'un Mémoire sur la résolution algébrique des équations. Avril 1830, tome 13, pp.271-272;
> Note sur la résolution des équations numériques. Juin 1830, tome 13, pp.413-414;
> Sur la théorie des nombres. Juin 1830, tome 13, pp.428-435.

Na noite precedendo sua morte, 29 de maio de 1832, Galois escreveu três cartas. Uma era pessoal, nada falava sobre política e era endereçada a seu grande amigo Auguste Chevalier. Ficou entre os vários papéis que sua mãe depois entregou a Chevalier. Duas eram de teor político, estrategicamente deixadas para serem distribuídas logo após o duelo, uma endereçada a “todos os republicanos” e outra para N.L. e V.D.. Não se sabe quem são N.L. e V.D. Há uma possibilidade que sejam Napoléon Lébon e Vincent Duchâtelet ou Vincent Delaunay. Os três eram ativistas políticos. As cartas, escritas com muita habilidade, dissimulam seu plano de, voluntariamente, ter se sacrificado pela causa política. Galois fala em uma armação, articulada por uma *coquette*, para que ele fosse agredido na sua honra e não restasse outra alternativa que o duelo. Usa frases que insinuam que havia um plano para assassiná-lo. Mas não deixa claro qual o plano. Essa pode ser a causa das inúmeras versões para sua morte.

A outra carta, mais longa, é dirigida pessoalmente a Auguste Chevalier e trata somente de matemática. Galois fala sobre três memórias que ele havia escrito e faz um resumo das mesmas. As memórias a que ele se refere, focalizando a teoria das equações e as funções integrais, parecem ter sido escritas em 1831, parte delas possivelmente enquanto ele se encontrava na prisão. Esta carta não faz qualquer menção à sua morte, programada para o dia seguinte, nem faz qualquer comentário político. Ele pede para Chevalier fazer publicar a carta na *Revue encyclopédique*, que era o nome simplificado da *Revue encyclopédique ou analyse raisonnée des productions les plus remarquables dans la littérature, les sciences et les arts*, uma publicação liberal, com tendência política, fundada pelo político Marie-Antoine Jullien. A revista era publicada mensalmente, e teve duração curta, de 1819 a 1835. Ela incluía vários artigos sobre a vida intelectual em todo o mundo e era um tipo de noticiário científico. A carta foi publicada no número de setembro de 1832, p.568.

A carta começa como *“Mon cher ami”*. Cerca de sete páginas são técnicas, onde ele resume suas memórias. Na conclusão, diz:

> *“*Você sabe, meu querido Auguste, que esses assuntos não são os únicos que eu tenho explorado. Minhas meditações principais, já há algum tempo, estavam dirigidas a aplicações da teoria da ambiguidade à análise transcendente. Trata-se de ver, a priori, em uma relação entre quantidades ou funções transcendentes, quais trocas se poderia fazer, quais quantidades se poderia substituir às quantidades dadas, sem que a relação possa deixar de ter lugar. Feito isso, reconhecer em seguida a impossibilidade de muitas expressões que se poderia procurar. Mas eu não tenho tempo, e minhas idéias ainda não são bem desenvolvidas sobre esse terreno, que é imenso.
> Você fará esta carta ser impressa na *Revue encyclopédique*.
> Eu tenho muitas vezes na minha vida me arriscado a propor resultados sobre os quais eu não estava seguro; mas tudo que eu escrevi há pouco já estava na minha cabeça há um ano, e é do meu maior interesse de não mais me enganar para que ninguém mais pense que eu tenho anunciado teoremas dos quais eu não tenho uma demonstração completa.
> Você pedirá publicamente a Jacobi e a Gauss para dar suas opiniões não sobre a verdade, mas sim sobre a importância dos teoremas.
> Depois disso haverá, eu espero, certas pessoas que acharão proveitoso decifrar toda essa bagunça (*gâchis*).
>
> Eu te abraço com efusão.
>
> E.GALOIS 29 de maio de 1832 *”*

A romantização da morte de Galois diz que as memórias foram escritas na véspera de sua morte. Não é verdade. Elas já estavam escritas. Auguste Chevallier vasculhou, depois da morte de Galois, os papéis deixados por ele, principalmente procurando as três memórias a que ele se refere na carta. A primeira, *MÉMOIRE. Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* é precedida por um Prefácio, escrito em 16 de janeiro de 1831. Parece que Galois tentou excluir esse prefácio, pois ele foi encontrado, por Chevalier, no meio de vários papéis que, parece, Galois queria eliminar, pois aparece todo riscado, como quem se arrependeu de tê-lo escrito. Mas Chevallier decidiu anexá-lo. A segunda memória aparece como *Fragment d'un seconde mémoire . Des équations primitives qui sont solubles par radicaux*. No texto há referência a um trabalho que Chevalier não encontrou. E o último parágrafo das notas diz

> « Nós sabemos que, em geral, entre as substituições de nosso grupo reduzido, não se achará substituições de ordem *p*. Poderá havê-las de ordem *p-1* ? Isto é o que eu vou pesquisar.»

E Chevalier acrescenta uma nota

> «Eu procurei inutilmente nos papéis de Galois a continuação do que acabamos de ler.»

A *Revue encyclopédique* pretendia publicar os papéis organizados por Chevalier, mas isso não aconteceu.

Alguns anos depois, atendendo ao pedido de amigos de Galois, Liouville decidiu publicar os trabalhos recolhidos por Chevalier na revista que ele havia fundado em 1836 e que dirigia. Joseph Liouville (1809-1882), quase da mesma idade de Galois, foi aluno da *École polytechnique.* Doutorou-se em 1836 e nesse mesmo ano fundou o *Journal de mathématiques pures et appliquées*, que passou a ser conhecido como *Journal de Liouville,* e se tornou um dos mais importantes periódicos de pesquisa matemática.

Publicou os manuscritos entregues a ele por Auguste Chevalier e decidiu ainda incluir as cinco memórias que haviam sido publicadas no *Annales de Gergonne* e no *Bulletin de Férussac.* Esse trabalho tornou-se, portanto, as obras matemáticas completas de Galois. O trabalho foi intitulado *Oeuvres mathématiques d'Évariste Galois*, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome 11, 1846, pp.381-444.

Liouville escreveu uma pequena introdução, na qual fala dos percalços de Galois perante seus professores e examinadores e das críticas feitas por eles, que considerou pertinentes, particularmente quando dizem que suas memórias ininteligíveis. Liouville escreve

> «Mas agora tudo mudou. Galois não existe mais! Vamos evitar continuar fazendo críticas inúteis, deixemos para lá os defeitos, vejamos as qualidades.»

Informa que a carta deixada para Auguste Chevalier, que havia sido publicada na *Revue encyclopédique*, será publicada na íntegra. De fato, esta carta sintetiza todos seus resultados e aponta para outros. Menciona que, no mesmo número da *Revue encyclopédique*, havia sido publicada uma Notícia, na forma de *Necrologi*, por Auguste Chevalier. Mas justifica sua decisão de não incluir a necrologia, dizendo

> "Nós não acreditamos ser apropriado fazer entrar [esse Necrológio] na nossa coletânea. Ele tem detalhes interessantes, mas, na sua maioria, estranhos à ciência. E algumas afirmações, certos julgamentos absolutos sobre as pessoas e as coisas, talvez atraíssem muitos contraditores. É verdade que aos olhos daqueles que se afastassem muito de suas opiniões, o autor desse Necrológio teria encontrado suas desculpas na amizade que o unia a Galois."

Assim, Liouville evita entrar nas discussões sobre as causas e as circunstâncias da morte de Galois. E logo em seguida diz

> "Quanto a nós, que não conhecemos, nem mesmo jamais vimos esse jovem homem tão infeliz, nos fecharemos em nosso papel de geômetra, e as observações que poderemos nos permitir, publicando sua obra sob a inspiração da sua família, mas somente falarão de matemática."

Assim, são publicadas as obras completas de Galois. A repercussão foi relativamente lenta, embora a idéia de grupos fosse ganhando espaço, independentemente, por outros matemáticos.

O reconhecimento da importância dos resultados de Galois foi do próprio Liouville, quando considera, na introdução à primeira memória, o principal resultado de Galois, o *beau théorème*

> "Para que uma equação irredutível de grau primo seja solúvel por radicais, é necessário e suficiente que todas as raízes sejam funções racionais de duas quaisquer dentre elas."

e complementa dizendo que

> "Este método, verdadeiramente digno da atenção dos geômetras, será suficiente para assegurar a nosso compatriota um lugar no pequeno número de sábios que têm merecido o título de inventores." [20]

A genialidade de Galois foi uma verdadeira revolução conceitual. Para estudar uma equação, criou uma classe de objetos matemáticos de natureza completamente diferentes associados a essa equação, e obter dessa classe informações qualitativas, tais como solvabilidade e solvabilidade por radicais, sobre a equação.

Chamou grupo a essa classe. Repito sua definição:

[20] *Oeuvres mathématiques d'Évariste Galois, Journal de mathématiques pures et appliquées,* tome 11, 1846, pp.381-444. p.383.

> “quando quisermos agrupar as substituições, nós fazemos com que todas venham de uma mesma permutação ... devemos ter as mesmas substituições, qualquer que seja a permutação da qual partimos ...Portanto, se num grupo assim tivermos as substituições S e T, estamos seguros de ter a substituição ST.”[21]

A maneira de realizar essa grande mudança conceitual foi associar um grupo de transformações às *n* raízes de uma equação de grau *n*. Tal grupo é construído a partir dessas raízes e a análise das propriedades desse grupo, que é hoje chamado, em honra a ele, o grupo de Galois da equação, dá informações sobre a equação. O grupo de Galois consiste de um subconjunto das permutações das soluções, no qual é definida uma lei de composição de permutações.

## Evariste Galois e a Educação

Seu avô materno, Thomas-François Demante, era professor da Faculdade de Direito da antiga Universidade de Paris. Era um latinista e transmitiu à sua filha Adélaïde-Marie a paixão pelas letras clássicas. Évariste foi educado em casa, por sua mãe, até seus 12 anos, quando foi matriculado no prestigioso *Lycée Louis-le-Grand*. Seu envolvimento político se manifestou logo no início de seus estudos. Os alunos organizaram uma demonstração contra o Rei Luis XVIII. Vários alunos foram expulsos, mas Galois, que mesmo tendo praticado um ato mais agressivo, foi poupado. Talvez pela sua pouca idade e por se aluno há poucos meses. Seu aproveitamento era irregular. Seus estudos eram indisciplinados, inclusive em matemática. Dava pouca importância aos livros adotados e lia intensamente e com facilidade renomados autores, como Legendre, Lagrange, Cauchy, Gauss, Abel. A opinião de seu professor de Retórica é muito esclarecedora. Disse que Galois tinha má conduta e um caráter pouco aberto, com amor próprio e afetação de originalidade insuportáveis. E prossegue dizendo que “o furor matemático o domina”. Diz ainda que seria melhor que consentissem que ele só estudasse matemática. Assim, o jovem Évariste não perderia seu tempo na escola, onde não faz mais que “atormentar seus mestres e atrair punições para ele.” A ambição de Galois era entrar na Ecole polytéchnique. Tentou entrar em 1828. Sua reprovação é cheia de controvérsias, incluindo acusação de ofensa a examinadores. Voltou ao *Lycée Louis-le-Grand* e matriculou-se no curso de *Mathématiques spéciales*, cujo professor era Louis-Paul-Émile Richard (1796-1849), um destacado professor, reconhecido no ambiente matemático. Teve excelentes alunos. De Galois disse “Este estudante trabalha somente nos domínios mais altos da matemática”. Reconheceu o seu talento e deu a ele todo apoio. Inclusive influenciou Gergonne para publicar seus trabalhos

---

[21] *Journal de mathématiques pures et appliquées (Journal de Liouville)*, Tome XI, année 1846, p.419.

e estimulou-o a enviar o trabalho, que foi perdido por Cauchy, para a *Academie des sciences*. Apesar de tudo isso, Galois foi novamente reprovado na admissão à *École polytechnique* e optou por uma carreira de professor ao entrar na *École préparatoire* (*École normale*). Em 26 de fevereiro de 1830 assinou um contrato para atuar, por dez anos, como professor da escola pública. Não teve oportunidade de se desenvolver na profissão.

Logo manifestou suas ideias sobre educação, enviando uma carta em que teceu considerações sobre Educação.[22] Suas opiniões refletem, claramente, sua experiência como aluno, tanto no *Lycée Loius-le-Grand* quanto na *École préparatoire*. Na carta Galois acusa os educadores da restauração, que é o período de reinado de Luis XVIII e Carlos X, indo da queda de Napoleão até a revolta das barricadas, de 1830, de promoverem ideais monárquicos e clericais, privilegiando a mediocridade e ignorando o mérito científico de indivíduos. Focaliza professores, livros e exames. Diz que não há preocupação em desenvolver espírito científico e raciocínio simples. Pergunta até quando os jovens alunos terão que ouvir, memorizar e repetir a apresentação minuciosa de teorias truncadas e inúteis. Requerem-se dos alunos cálculos e raciocínios longos, muitas vezes falsos, e corolários cujas demonstrações fazem parte dos próprios enunciados, em detrimento de proposições mais simples e brilhantes da álgebra. Não se dá ao aluno oportunidade de criar seus próprios métodos e formas de raciocínio. De quem é a culpa? Certamente não dos professores, que são dedicados e queixam-se do estado de sua profissão. Galois põe a culpa nos examinadores e nos livreiros que os servem, e é bem explicito ao dizer que os livros são grandes e caros. Quanto mais volumosos os livros, maior garantia de uma venda proveitosa. E Galois complementa, dizendo

> “por isso é que vemos aparecer cada ano volumosos compêndios trabalhos desfigurados dos grandes mestres ao lado de exercícios escolares”.

Questiona o fato de os examinadores apresentarem as questões de uma forma tão emaranhada, dizendo que eles parecem recear que seus questionamentos sejam entendidos pelos alunos. E pergunta

> “de onde vem esse malfadado hábito de complicar as questões com dificuldades artificiais?”.

Diz que o aluno se ocupa menos em aprender do que em se preparar para passar os exames e aprende uma

> “uma ciência nova, que vai aumentando cada dia, que consiste em conhecer os desgostos e as preferências científicas, as manias e o humor dos senhores examinadores.”

[22] *Gazette des Ecoles: Journal de l'Instruction Publique, de l'Université, des Séminaires*, numéro 110, 2e année, Janvier 1831.

Conclui dizendo que é uma ilusão ficar feliz por ter passado nos exames. E promete que explicará a razão disso numa próxima carta. Esta outra carta jamais foi publicada e, ao que parece, nem foi escrita. Foi nessa época que Galois intensificou seu envolvimento político.

Fiquei surpreso em ver críticas que se aplicam à educação de hoje, em pleno 2011, estrangulados por exames subordinados a interesses econômicos escusos, particularmente editoriais. Essa situação é não só do Brasil, mas de todos os países.

Nas reflexões de Galois sobre educação não há qualquer menção a conteúdo, nem sobre o que deve ser ensinado.

De Évariste Galois, o jovem politizado e crítico da educação, que se sacrificou em vão pela causa republicana, não há implicações pedagógicas diretas. O genial matemático que, segundo Bourbaki, deve ser considerado o verdadeiro iniciador da teoria dos grupos, teve importantes implicações indiretas na Educação. Sua idéia genial, que foi o conceito de grupos de substituições, resultou em mudanças profundas no ensino da matemática em todos os níveis e no próprio conceito de matemática, conduzindo ao conceito de estruturas, um dos pilares da matemática atual.

Seus trabalhos, de fato as obras completas de Évariste Galois, foram publicados em 1846. Curiosamente, nas cinco páginas de comentários introdutórias aos trabalhos de Galois, onde Liouville destaca o *beau théorème* que eu mencionei acima, a palavra grupo não é sequer mencionada.

**A repercussão da idéias de Galois na matemática**

O trabalho de Galois sobre resolução de equações foi logo reconhecido. O primeiro artigo a se referir a ele é de Enrico Betti (1823-1892), publicado em 1851. De fato, álgebra era identificada com resolução de equações. Por exemplo, Michel Chasles (1793-1660), em uma memória sobre *Histoire de l'Algèbre*, na *Academie des sciences* em 1841, trata somente de equações. Logo os resultados de Galois são difundidos. Embora os resultados sobre a teoria das equações tenham sido logo notados, inclusive num curso dado por Richard Dedekind, em 1856. A teoria foi devidamente explicada na terceira edição, publicada em 1866, do *Cours d'algèbre supérieur*, de Joseph Alfred Serret (1819-1885), um dos mais populares livros da época. Grupos aparecem apenas como o instrumento usado por Galois para o estudo das equações algébricas, mas não como uma teoria *per se*. O mesmo se dá nas inúmeras edições subseqüentes. Somente Camille Jordan, com o livro *Traité dês substitutions et dês équations algébriques*, publicado em 1870, apresenta os grupos de substituições como uma entidade autônoma, e indica possibilidades de serem aplicados a outras teorias matemáticas, como a teoria das equações. Parte de uma teoria abstrata para chegar a problemas reais. Embora esta seja considerada a primeira teoria de grupos, deixa a desejar quanto à abstração. O texto de Jordan torna-se popular, como o de Serret.

A idéia de grupo é um bom exemplo de *ésprit du temps*. Assim como na transição do século XVIII para o século XIX intensificou-se a busca de critérios de convergência e teoremas de existência, na primeira metade do século XIX, começam a ser focalizadas, de maneiras distintas, em várias áreas da matemática, a ideia de leis de composição. O germe dessa idéia já se nota na teoria de vetores, conhecida na mecânica como composição de forças; com Abel (1829); com a representação geométrica dos números complexos (Gauss, 1831); com os quaterniões de Hamilton (1843). A originalidade de Galois é fazer uma abstração pura. Considera um conjunto de objetos, não faz referência à natureza dos mesmos, e define uma lei de composição, semelhante e uma tabuada, para esses objetos. Fala de suas propriedades e assim introduz o conceito de grupo. Como se lê *Note historique* em Bourbaki, é "Évariste Galois que deve ser considerado o verdadeiro iniciador da teoria"[23]. Alguns anos depois, Arthur Cayley (1821-1895) dá um importante passo, dando em 1854 a primeira definição abstrata de grupo, mediante uma lei de composição definida por uma tabuada. Faz referência ao trabalho de Galois, reconhecendo que ele já havia definido grupos de substituições, que são representações abstratas de objetos matemáticos bem definidos.

A ideia de grupos foi sendo crescentemente apropriada por matemáticos de várias especialidades na segunda metade do século XIX e na entrada no século XX. Surgiram conceitos ligados a estruturas abstratas, como corpos, anéis, ideais, corpos e outras estruturas. Uma nova Álgebra emerge como o estudo das estruturas algébricas. Uma estrutura algébrica pode ser determinada por uma ou várias leis de composição, internas ou externas, entre os elementos de um ou vários conjuntos, essas leis podendo estar sujeitas a satisfazer certas condições, como, por exemplo, comutatividade, associatividade e outras ou a ter certas relações entre elas.[24]

A partir de meados do século XIX, vários autores propuseram suas próprias leis de composição e as condições sujeitadoras, definindo estruturas várias, muitas essencialmente equivalentes, diferindo apenas em forma e nomenclatura. Essa situação era, sem dúvida, um empecilho para o pleno desenvolvimento da nova Álgebra.

---

[23] Nicolas Bourbaki, *Éléments de Mathématiques, Livre II Algèbre, Chap.I Structures Algébriques*, Hermann , Paris, 1851, p.154.
[24] Essa é, essencialmente, a definição de estruturas algébricas de Bourbaki, *op.cit*. p.42.

A ideia de grupo, o ponto de partida para todo esse desenvolvimento, mostrou-se útil na Análise, na Geometria, na Mecânica e na Física Teórica. Assim, a Álgebra adquiriu um papel de importância fundamental em toda matemática e, de fato, em todas as ciências, particularmente nas ciências aplicadas (cristalografia, moléculas, etc.). Hoje talvez mais básico que os cursos de Cálculo.

Uma das importantes vertentes do desenvolvimento posterior da teoria de grupos foi o conceito de grupos contínuos, desenvolvido pelo norueguês Marius Sophus Lie (1842-1899), em colaboração com o alemão Felix Christian Klein (1849-1925). Esses grupos foram utilizados para o estudo de equações diferenciais, dando origem à teoria dos grupos de Lie. Klein tornou-se um dos mais destacados matemáticos do século, com importantes trabalhos em transformações infinitesimais e em teoria de funções, particularmente funções automorfas. Logo assumiu a importância da matemática aplicada para o desenvolvimento do país. Deu enorme importância à melhoria do ensino de matemática.

**Felix Klein e sua influência na educação**

Um importante desenvolvimento devido a Feliz Klein teve repercussões na educação secundária. Klein fez a interligação entre a teoria dos grupos e a geometria, num importante trabalho denominado "Considerações comparativas sobre as pesquisas geométricas modernas", que foi a aula inaugural dada por ele na Universidade de Erlangen, em 1872, como parte dos requerimentos para a nomeação como Professor da Universidade. Formado no ano anterior na célebre Universidade de Göttingen, ficou apenas três anos na universidade de Erlangen, transferindo-se para Munich, depois Leipzig e em 1886 ingressou, definitivamente, como Professor na Universidade de Göttingen.

A aula inaugural só foi publicada em 1893, na prestigiosa revista *Mathematische Annalen.* Foi imediatamente traduzida para o inglês por M. W. Haskell e publicada.[25]

Em uma nota introdutória a esta tradução, Klein diz:

> "Meu Programa de Erlangen de 1872 apareceu como uma publicação separada, e teve uma circulação limitada. Com isto eu fiquei mais facilmente satisfeito, pois eu não poderia esperar que as ideias desenvolvidas no Programa recebessem, de início, muita atenção. Mas agora, que o desenvolvimento geral da matemática tomou a direção precisamente correspondendo às minhas ideias, e particularmente depois que Lie começou a publicação, de forma estendida, de sua Teoria dos Grupos de Transformação (Leipzig, vol.I 1888, vol.II 1890), parece apropriado dar uma circulação mais ampla para a exposição do meu Programa."

[25] *Bulletin of the New York Mathematical Society*,2 (1892-1893), pp.215-249.

Seu programa sintetiza a geometria como o estudo das propriedades espaciais invariantes sob a ação de um grupo de transformações. Assim, a Geometria Euclidiana trata das propriedades que são invariantes por rotações e translações, a geometria projetiva por projetividades e assim por diante. A própria utilização da palavra "Programa" é para significar que ele propõe um enfoque à geometria significa que está em permanente processo de avançar.

Neste trabalho, Klein reconhece o trabalho de Galois sobre a teoria de equações, dizendo que ambos, ele e Galois, focalizam grupos de transformações. Mas diz que Galois lida com um número limitado de elementos distintos, enquanto ele deve lidar com um número indefinido de elementos de um conjunto contínuo.

Klein propõe um estudo unificado da geometria, o que virá a ter importantes implicações pedagógicas. Em 1908, Klein fundou, durante o Congresso Internacional de Matemáticos, em Roma, a Comissão Internacional de Instrução Matemática, o ICMI, tornando-se seu primeiro presidente.

No próprio ano 1908, publicou a obra *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt* [Matemática Elementar de um Ponto de Vista Avançado}, em dois volumes, que se tornaria a obra fundamental para a renovação da Educação Matemática nas escolas secundárias. Em dois volumes, a obra é dividida em quatro partes: Aritmética, Álgebra, Análise e Geometria. O livro é destinado sobretudo à formação de professores. Klein deixa bem claro que na formação de professores ele considera essencial melhorar a

> "*cultura matemática geral*: ao lado de conhecimento específico de detalhes, que faz parte das várias disciplinas, deve haver uma percepção do que é o objetivo de cada disciplina e das relações históricas entre elas."p.2)

Curiosamente, em toda a obra não há qualquer referência a Galois. Nem a parte de Álgebra faz qualquer referência a grupos ou a outras estruturas algébricas. Porém, na Geometria, grande parte é dedicada ao estudo dos grupos de transformações como suporte para uma exposição elementar do Programa de Erlangen. Felix Klein e sua obra foi divulgado no Brasil principalmente por Euclides Roxo (1890-1950).um pioneiro da Educação Matemática em nosso país.

Uma observação interessante de Klein é sobre a Geometria de Euclides. Ele diz

> "O *grande significado histórico* dos *Elementos* de Euclides consiste no fato que por meio deles chegamos ao *ideal de um desenvolvimento lógico consistente de geometria.*" P.206

Klein diz que a Geometria euclidiana é insuficiente e, de fato, impede o pleno desenvolvimento da aritmética. Para ele, as estruturas algébricas são estudadas na Aritmética e a Álgebra continua sendo o estudo de equações. Ele diz que um grande prejuízo da Geometria Euclidiana está no fato de ela ter impedido o desenvolvimento da aritmética, que sempre esteve numa posição de subordinada à geometria, enquanto

> "Hoje (1908) a aritmética, como uma disciplina fundamental própria, atingiu uma posição dominante."p.297

No meu entender, essas observações de Felix Klein antecipam a bombástica expressão de Jean Dieudonné (1906-1092), pronunciado num colóquio em Royaumont, Bégica, em 1959: *"À bas Euclide!*"

A maneira de Klein entender o que é Aritmética e o que é Álgebra é consequência do desenvolvimento histórico da matemática, particularmente da Álgebra, sobretudo sua intensificação a partir da segunda metade do século XIX, que pode ser considerada outro exemplo de *ésprit du temps*. Surge o estudo dos grupos de transformações, fortemente estimulado por Galois. Quase ao mesmo tempo, surgem, independentemente, várias inovações. Por exemplo, *As Leis do Pensamento* (1854), por Georges Boole (1815-1864); os quaterniões, por William Rowan Hamilton (1805-1865); as matrizes, por Arthur Cayley (1821-1895); a teoria dos conjuntos, em 1872, por George Cantor (1845-1918), que deu importante contribuição, sobretudo em linguagem; as fundamentações dos números, por Richard Dedekind (1831-1916), em 1888, e por Giuseppe Peano (1868-1932), em 1889, que utilizam conceitos de elemento, de composição e de operação. A noção de grupo e das demais estruturas algébricas estão presentes, mas formuladas e apropriadas por matemáticos, às vezes de uma mesma escola, de maneiras muito diferentes, com outras definições e notações.

## A Álgebra Moderna adquire uma identidade

Nicolas Bourbaki reconhece, na *Note historique* do primeiro capítulo do livro de Álgebra, que

> "Após 1850, se os tratados de Álgebra ainda reconhecem por muito tempo a preeminência da teoria das equações, novas pesquisas não são mais dominadas pela preocupação de aplicações imediatas à resolução de equações numéricas, e se orientam mais e mais em direção ao que hoje consideramos o problema essencial da Álgebra, que é o estudo das estruturas algébricas por elas mesmas [como um objetivo em si]."[26]

Mais uma vez recorro à metáfora do *ésprit du temps,* que é a emergência de um pensamento filosófico que seria, em meados de século XX, denominado estruturalismo. As

[26] Nicolas Bourbaki, *Éléments de Mathématiques, Livre II Algèbre, Chap.I, Structures Algébriques,* Hermann , Paris, 1951, p.155.

origens estão na segunda metade do século XIX, com a intensificação de estudos, sobretudo etnográficos, dos chamados povos primitivos, que resultaram em antropologia e lingüística, nos grandes movimentos sociais que abalaram a Europa, dando origem ao materialismo histórico, nos estudos do comportamento humano, que resultaram na psicanálise, e nos estudos matemáticos.

Voltando ao novo pensar sobre a Álgebra, reconhece-se que o grande obstáculo à nova conceituação é um desenvolvimento desordenado, no sentido de não haver definições e notações acordadas, o que remete, essencialmente, a uma questão de linguagem. Ideias próximas eram difíceis de serem reconhecidas por matemáticos de outras escolas, e até, muitas vezes, da mesma escola. Isso também se tornou um obstáculo à implementação das ideias propostas por Felix Klein. Mas mesmo com as dificuldades de notações, a teoria dos grupos vai ganhando espaço nos programas dos cursos de matemática.

Coube ao matemático holandês Bartel Leendert van der Waerden (1903-1996), publicar, em 1930, uma obra decisiva, *Moderne Álgebra*, em 2 volumes, reunindo de forma coerente e organizada, os resultados obtidos até então. O livro teve uma segunda edição em 1937, que foi traduzida para o inglês em 1948. O próprio van der Waerden fez a revisão da tradução e fez ligeiras ampliações e essa obra tornou-se uma referência básica.

O objetivo do livro é claramente exposto pelo próprio autor:

> "Os desenvolvimentos da Álgebra muito além de suas limitações anteriores são devidos, principalmente, à escola "abstrata", "formal" ou "axiomática". Esta escola criou inúmeros conceitos novos, revelou interpretações antes desconhecidas, e levou a resultados de grande alcance, especialmente nas teorias dos corpos e ideais, de grupos, e números hipercomplexos. O principal objetivo deste livro é introduzir o leitor neste inteiro mundo de conceitos. No âmbito dessas ideias modernas os resultados clássicos e métodos encontrarão seus devidos lugares." P.xi

Reconhece-se o caráter propedêutico da Álgebra sobretudo quando van der Waerden diz que o objetivo é, essencialmente, definir conceitos e dar os resultados principais, sem se preocupar com sua utilização por outros pesquisadores, que a utilizarão de acordo com seus interesses e motivações. De fato, eu faço essa mesma leitura na obra de Galois – os grupos interessam para resolver equações. E também no Programa de Erlangen – os grupos interessam para classificar as geometrias. Essa mesma ideia estava intrínseca na proposta de *al-jabr* (transpor o sinal =) e *al-muqabala* (reduzir termos semelhantes) de al-Karizmi.

Desde sua publicação, em 1930, o livro de van der Waerden exerceu enorme influência. Uma obra que podemos considerar muito influente para o movimento de *New Mathematics*, ou simplesmente *New Math*, como ficou popularmente conhecido e que dominou o cenário da Educação nos Estados Unidos na década de cinqüenta foi o livro dos matemáticos Garrett

Birkhoff e Saunders MacLane *A Survey of Modern Álgebra*, publicado em 1941 pela importante editora Macmillan, de New York.[27]

O livro de van der Waerden foi, também, muito influente na obra de Bourbaki, como é reconhecido na *Note historique*

> "O tratado de van der Waerden, publicado em 1930, reuniu pela primeira vez esses trabalhos [publicados a partir de meados do século XIX] em uma exposição de conjunto, abrindo o caminho e servindo de guia às inúmeras pesquisas de Álgebra abstrata destes últimos anos."[28]

Um desenvolvimento de mais alcance foi o ambicioso projeto do "matemático multicéfalo" Nicolas Bourbaki, iniciado em 1939, que é a publicação de uma obra monumental, *Eléments de mathématiques,* que pretende ser um tratado sobre toda a matemática conhecida. Os autores planejaram organizar o livro em *Parties,* e cada parte dividida em *Livres,* cada livro dividido em *Chapitres* e um *Fascicule des resultats*, sintetizando o conteúdo do livro. A obra completa é, na verdade, um programa no sentido de Klein e de Lakatos, isto é, uma obra cujo objetivo não é terminar, mas sim ser continuado pelo grupo Bourbaki, que é o conjunto de todos os autores que se renovam segundo um ritual. Os capítulos, individualmente ou reunidos, são publicados em fascículos. A *PREMIÈRE PARTIE* é *Les structures fondamentales de lánalyse*, mas o grupo não se decidiu sobre o que seriam as demais partes. A Primeira Parte consiste em *Livre I: Théorie dês ensembles; Livre II: Algèbre; Livre III: Topoloçie générale; Livre IV: Fonctions d'une variable réelle, Livre V: Espaces vectorielles topologiques; Livre VI: Intégration.*

O grupo decidiu publicar seus livros na *Hermann et Cie, éditeurs*, de Paris, que havia sido fundada em 1876 pelo matemático Arthur Hermann. Os fascículos da obra *Éléments de mathématique* foram publicados na coleção *Actualité scientifiques et industrielles*., que já tinha muitos volumes impressos. Assim, o primeiro volume, que foi o *Fascículo des résultats,* do *Livre I: Théorie des ensembles,* foi publicado em 1939, como fascículo 846. O quarto, que foi o *Chapitre I; Structure algébriques,* do *Livre II: Algèbre* foi o fascículo 934.

É interessante notar que a necessidade sentida por Bourbaki de publicar, antes de qualquer outra área específica, um fascículo geral, sem preocupação com demonstrações, mas simplesmente fixando notações, definições e resultados, foi a mesma estratégia adotada por van

[27] Sua segunda edição, publicada em 1948, foi muito popular no Brasil, sendo adotada em muitos cursos de matemática.
[28] Nicolas Bourbaki, *Éléments de Mathématiques, Livre II Algèbre, Chap.I, Structures Algébriques,* Hermann , Paris, 1851, p.157.

der Waerden ao escrever o *Moderne Álgebra*. O Caítulo 1, intitulado "Números e Conjuntos" dá as notações e definições essenciais.

A repercussão da obra de Nicolas Bourbaki na matemática é bem estudada. Particularmente, teve grande influência na Universidade de São Paulo.[29]

**Implicações pedagógicas**

Espero ter dado uma ideia, neste trabalho, da enorme influência de Évariste Galois no desenvolvimento da matemática. Mas sua influência na Educação foi indireta, de fato remota. A influência de Felix Klein foi enorme. Ele pode ser considerado um patrono da Educação Matemática. Em pleno apogeu de sua carreira como pesquisador matemático, resolveu dedicar-se, no início do século XX, à política de desenvolvimento científico e, consequentemente, à matemática, que ele considerava prioritária para esse desenvolvimento. Mesmo Klein, reconhecendo a importância de Galois como matemático, não vê sua influência direta na Educação Matemática.

Os fatores que fizeram a Educação Matemática adquirir um caráter de prioridade, a partir do início do século XX, são de natureza política, muito bem identificadas por Klein. A busca de um novo cenário político na Europa, a partir da segunda metade do século XIX, que se traduzia em hegemonia imperial, é evidente. A hegemonia imperial dependia, fundamentalmente, do desenvolvimento industrial, que dependia, com crescente intensidade, dos avanços da ciência aplicada. A Primeira Guerra Mundial, de 1914-1918, deixa evidente a prioridade que deve ser dada à educação científica e tecnológica. Isso exigia uma profunda renovação da educação secundária, particularmente do ensino da matemática. O curso do desenvolvimento científico abala a prioridade absoluta do contínuo, em particular a posição dominante do Cálculo Diferencial e Integral nos currículos. O que depois viria a ser chamada Matemática Discreta ou Matemática Finita estava se delineando. Ao mesmo tempo, a matemática pura busca uma fundamentação na qual o contínuo perde sua primazia. As estruturas, particularmente algébricas, mostram-se mais adequadas para fundamentar os avanços da matemática e indispensáveis para a nova leitura do mundo.

Ao mesmo tempo, o estruturalismo filosófico se firma na Lingüística e na Antropologia, sobretudo graças aos trabalhos de Ferdinand de Saussure (1857-1913) e de Claude Levi-Strauss (1908-2009). Em meados do século, Nicolas Bourbaki explicita as estruturas fundamentais em

---

[29] Ver Rute da Cunha Pires : *A Presença de Nicolas Bourbaki na Universidade de São Paulo*, Tese de Doutorado, Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, agosto de 2006.

todos os setores da matemática. Na mesma época Jean Piaget (1896-1980) inova em educação explicando cognição a partir de estágios no desenvolvimento infantil, evidentemente um enfoque estruturalista à cognição.

A Segunda Guerra Mundial não deixou dúvidas quanto à necessidade de reformular o ensino da Matemática. Logo após o término da guerra, iniciam-se, nos Estados Unidos e na Europa, movimentos de renovação. Esses movimentos ganham força e passam a receber o desejado apoio oficial e popular após o lançamento do Sputnik, em 1957. A corrida espacial e a corrida armamentista, obviamente identificadas, exigia melhor formação de cientistas, o que pressupões uma base de matemática moderna. Tanto na Europa, principalmente na França, quanto nos Estados Unidos, o movimento se intensificou e teve enorme repercussão, inclusive no Brasil.[30]

O desencanto com o MMM como ficou identificado o Movimento de Matemática Moderna foi uma reação simplista a uma situação muitíssimo complexa. Abriu espaço para Matemática Realística e para inúmeras outras propostas, todas sujeitas ao desencanto.

Aquilo que motivou Felix Klein, que foi entender a sociedade como um todo e os processos de desenvolvimento deveria se repetir. Hoje é fundamental que a Educação Matemática e a própria Matemática examinem as angústias da sociedade e a crise de sustentabilidade da civilização. Mas esse tema escapa aos objetivos deste trabalho.[31]

[30] Ver a Tese de Doutorado de Beatriz Silva D'Ambrosio: The dynamics and consequences of the modern mathematics reform movement for Brazilian mathematics education. Indiana University, Bloomington, 1987.

[31] Os interessados podem ver Ubiratan D'Ambrosio: From Ea, through Pythagoras, to Avatar: Different Setting for Mathematics, *Mathematics in Different Settings*, Pinto, M.M.F.& Kawasaki, T.F.(eds.) *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education/PME* (4 volumes), Belo Horizonte, MG, Brazil, 2010; vol.1 pp.1-20 (ISSN 0771-100X).