••• Proposta 2 •••

Onde está a proporção?

Circe Mary Silva da Silva (UFES)

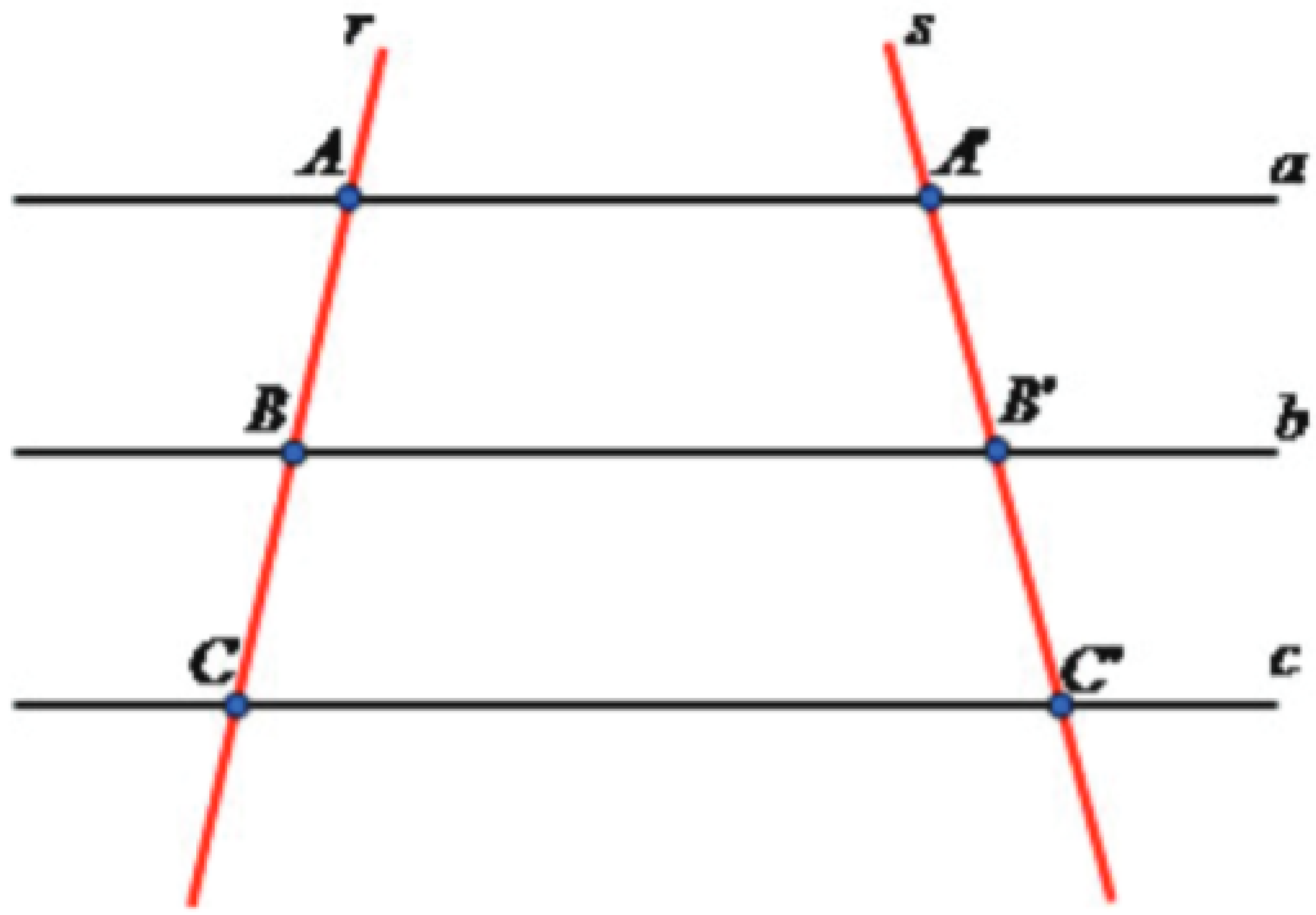
Qual professor de matemática já não ouviu a pergunta: “para que serve isso ou por que preciso aprender isso?”. Algumas vezes, o docente está preparado para responder tais perguntas, mas nem sempre. Seria muito bom que estivéssemos sempre em condições de satisfazer a curiosidade de nossos alunos e, com isso, motivá-los para a aprendizagem da matemática. Você concorda?

Figura 1: Proporções de medidas no corpo do homem.
Fonte: Vitruvius, De Architectura libri decem, Veneza, 1567, p. 89

Será que a história da matemática pode ser uma aliada do professor, gerando respostas satisfatórias a essas questões? Acreditamos, firmemente, nessa premissa, pois a história da matemática permite que conheçamos melhor as relações dos homens com o conhecimento em diferentes culturas, tempos e contextos. Assim, ela torna-se forte candidata a fornecer respostas sobre as razões, motivações e necessidades de produção de conhecimentos matemáticos. A seguir, apresentaremos um exemplo, a partir do conceito de proporcionalidade.

Um conceito basilar na matemática é o de proporcionalidade. Sabe quando surgiu? Seria com os gregos? Ou teria surgido com os egípcios ou sumérios? Acreditava-se até há poucos anos em que somente povos, que dominavam a escrita conhecessem e usassem tal conceito. Todavia pesquisas recentes em arqueologia comprovam que povos da pré-história, que viveram na região conhecida como Corredor do Rio Danúbio, no leste da Sérvia, já utilizavam a ideia de proporcionalidade. No sítio mesolítico de Lepenski Vir foram encontrados vestígios de edificações que possuíam medidas internas com proporções similares. Segundo Almeida (2011, p. 232): "Os comprimentos das laterais das casas eram três quartos do da fachada, ou seja, a largura da parte traseira da casa está sempre em uma proporção de 1:3 com os lados, e 1:4 com a fachada". Para aprofundar nessa fascinante leitura, sugerimos o livro *O nascimento da Matemática* de Manoel Campos de Almeida (2011).

Um conceito conhecido e usado em épocas tão remotas, em culturas que ignoravam a escrita, não pode ser de importância secundária! Tales de Mileto (cerca de 624 a.C – cerca de 547 a.C), já bem antes de Euclides (cerca de 325 a.C – cerca de 265 a.C), havia estabelecido que: Feixes de retas paralelas cortadas ou intersectadas por segmentos transversais formam segmentos de retas proporcionalmente correspondentes. Vejamos a figura 2, que ilustra o teorema de Tales:



$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Figura 2: Feixe de retas paralelas intersectadas por segmentos transversais

Se forem conhecidas nessa relação três medidas, a quarta será facilmente determinada. Onde podemos usar isso? Com base nessa importante relação, Tales conseguiu medir a altura de uma pirâmide (quando o sol estava numa posição em que a sombra de uma pessoa coincidia com sua altura), usando apenas um bastão de comprimento conhecido, a sombra do bastão (mensurável) e a sombra da pirâmide. Pela semelhança dos triângulos, conclui-se que a altura da pirâmide está para a sombra da pirâmide, assim como a altura do bastão está para a sombra do bastão.

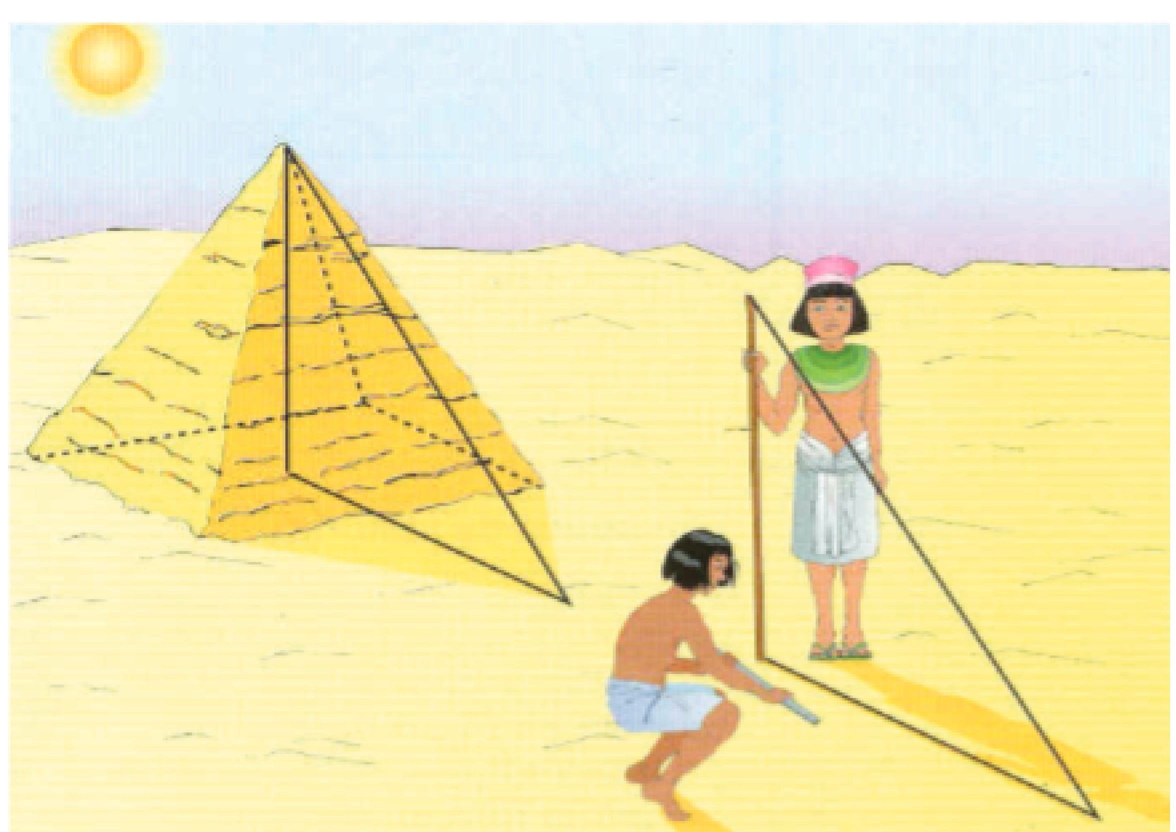


Figura 3: Pirâmide e sombra
(fonte:http://www.aceav.pt/blogs/ilidiasuarez/Lists/Artigos/Post.aspx?ID=33)

Segundo o historiador Heath (1981), provavelmente os resultados obtidos por Tales ocorreram por indução. Após fazer medições para um considerável número de casos, ele inferiu que se o comprimento da sombra de um objeto particular é igual ao seu comprimento, isso vale para outros objetos que produzam sombras. É interessante comentar com os alunos que desde a antiguidade, os resultados alcançados por matemáticos foram fruto de um longo e árduo trabalho, os quais também incluíram processos de experimentação.

Numa interessante reflexão, Jean Paul Guichard, em seu artigo *História da Matemática no ensino da Matemática*[1], traz uma severa cr**í**tica **à** forma árida de introduzirmos o teorema de Tales no ensino, sem o apelo à sua história. Segundo o autor:

> A Geometria é astúcia, faz rodeios, pega uma via indireta para chegar ao que ultrapassa a prática imediata. A astúcia, aqui, está no modelo: construir por redução de razão constante um esqueleto da pirâmide. De facto, Thales não descobriu outra coisa além da possibilidade da redução, a ideia de razão, a noção de modelo. Para uma pirâmide inacessível, Thales inventa a escala. Thales não descobriu senão isso… mas os nossos estudantes, durante a sua escolaridade, terão descoberto ao menos isso? As experiências que pude realizar em várias turmas mostram que não. E, no entanto, partindo do problema de Thales (medir a pirâmide) desemboca-se no coração de uma problemática motivadora que mobiliza o interesse e a reflexão dos estudantes, em que se modela o real, em que se sente a utilidade prática que pode ter a matemática, na qual se vêm fundir outros conhecimentos como

1 Este artigo é uma tradução adaptada para o português do artigo de Jean Paul Guichard -. IREM de Lyon in Bouvier, A. (coord), Didactique des Mathèmatiques, Cedic/Nathan, 1986. Disponível em: < http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/mhist.html>. Acesso em: acesso em 20 nov. 2013.

> a proporcionalidade. Estamos em presença, pois, da criação de uma situação didática rica em consequências.

No livro intitulado *História da Matemática em atividades didáticas*, Miguel et al. (2009, p.143), encontramos uma sugestão de atividade, envolvendo uma construção prática para o cálculo de alturas:

> Escolha uma edificação, um objeto ou uma árvore para que seja possível executar as tarefas a seguir: selecione uma vara de madeira, de aproximadamente 110 cm e a coloque fincada verticalmente no solo. Sugerimos que a vara de madeira seja fincada 10 cm no solo ou então a vara poderá ter 100 cm se ficar apoiada em uma base de madeira; procure observar as medidas da sombra da vara e do objeto simultaneamente em diferentes horas do dia para que seja possível determinar a altura do objeto a partir das medições; anote os resultados obtidos durante as observações realizadas; represente geometricamente o fato ocorrido utilizando para isso triângulos retângulos; construa um gráfico cartesiano representando as medidas efetuadas por você ao longo dos intervalos de tempo adotados para as medições.

A proporcionalidade tem um potencial tão fecundo que matemáticos como Euclides e Eudoxio (408 a.C – 355 a.C) dispensaram a esse conceito abordagens teóricas e aprofundadas. Ao apresentar o segmento de linha chamado quarta proporcional, Euclides (Livro VI, 2) apelou à geometria das áreas. Para um maior conhecimento sobre essa história, sugerimos a leitura de *Theory of proportion and the geometry of areas* de Carlos Correia de Sá (2000).

Abdounur (2012) nos ensina que Euclides, nos *Elementos*, não se refere à igualdade de razões, mas discute sobre igualdade de números e grandezas e não aborda igualdade entre razões como sendo iguais. Esse pesquisador propõe um experimento musical com uso do monocórdio, a fim de favorecer a percepção de similaridades entre conceitos musicais e matemáticos. Sugerimos a leitura de seu artigo *Uma abordagem histórico/didática de analogias envolvendo razões e proporções em contexto musical: um ensaio preliminar*. Nesse artigo[2] o professor interessado poderá conhecer atividades envolvendo proporções para serem aplicadas em sala de aula.

A Figura 1, do homem vitruviano, foi imortalizada pelos desenhos magistrais de Leonardo da Vinci (1452-1519). Todavia, foi o italiano Vitruvius (século I a.C) quem afirmou em sua obra *Arquitetura* que as medidas do corpo humano são proporcionais.

Existem várias edições dessa obra. Há uma versão em língua latina de 1567, cujo título é *De archictetura libri decem* e que está disponível no site[3] do Instituto Max-Planck[4]. Nela, Vitrivius afirma, entre outras, as seguintes proporcionalidades:

- A longitude dos braços estendidos de um homem é igual à altura de um homem.
- A largura máxima dos ombros é um quarto da altura de um homem.
- O comprimento da mão é um décimo da altura de um homem.
- A altura da orelha é um terço da longitude da face.
- A distância do topo da cabeça para os mamilos é um quarto da altura do homem.

---

2 O artigo está disponível na página http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/view/536.

3 Disponível em: <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/home/search?searchSimple=Vitruvius>. Acesso em 12/10/2013.

4 O projeto ECHOS disponibiliza fax-simile de livros antigos e relevantes para a História da Matemática e História da Ciência no portal do Instituto Max-Planck de História da Ciência (Berlin). Sugerimos fortemente uma visita a este site a todos interessados em estudos mais aprofundados na História da Matemática.

Sugestão de atividade para a sala de aula

O professor Humberto José Bortolossi, do Departamento de Matemática e Estatística da UFF, criou exercícios interessantes usando o Geogebra (software de matemática dinâmica, e desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática). No site http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-vitruvian-br.html, encontraremos um exercício para calcular as proporcionalidades do homem vitruviano. Com o uso do Geogebra, o aluno pode sozinho descobrir essas proporções e concretizar mais esse conceito.

Se o professor não dispuser de um laboratório de informática para fazer uso do software Geogebra, poderá, experimentalmente, com uma fita métrica, realizar medições nos próprios alunos e calcular as proporções (veja a Figura 4). Lembrando que Vitruvius considerava um "homem ideal", com simetrias perfeitas e no "mundo real", possivelmente, encontraremos apenas aproximações dessas relações.

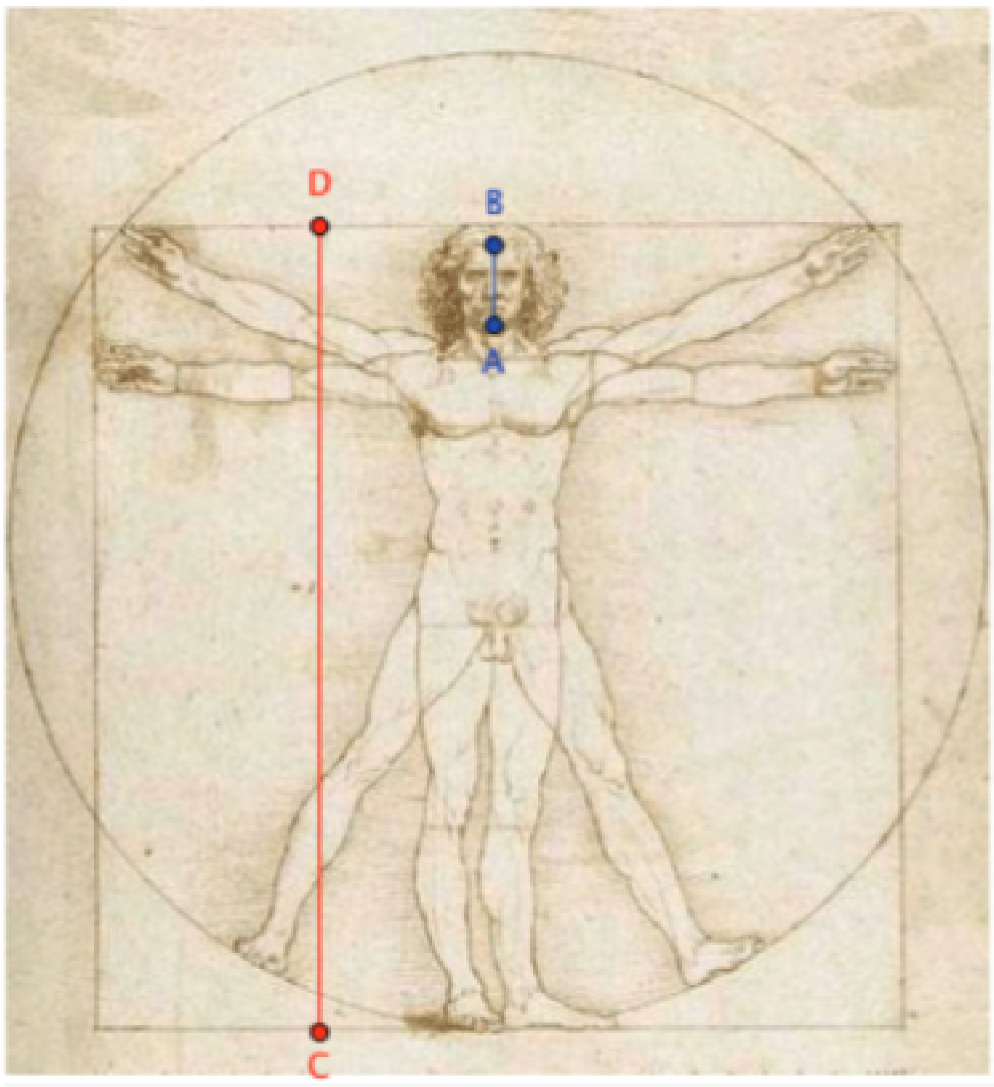


Figura 4: Ilustração do site http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-vitruvian-original-br.html

Conhecer um pouco sobre a história da educação matemática brasileira é uma forma de nos aproximarmos de autores de livros didáticos do passado. Alguns daqueles que viveram na virada do século XIX para o XX, já intuíam o papel da história da matemática na educação matemática e dialogavam com seus leitores, trazendo fragmentos históricos de importantes conceitos matemáticos que abordavam.

Ao introduzirem o capítulo "Razões e proporções", os professores Aarão Reis e Lucano Reis (1902, p. 572) afirmavam: "Embora só a Matemática precise a ideia de proporcionalidade, não deixa ela contudo de ser universal e espontânea, sugerida pela semelhança, que a mais simples observação fornece". Universal e espontânea – por isso, tão fecunda! Os mesmos autores apontaram que o conceito de proporção por muitos séculos era usado em linguagem natural, sem um algoritmo próprio.

Na falta de um algoritmo para expressar a proporcionalidade, Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci (1170-1250), utilizou um esquema para explicar a resolução da quarta proporcional (TROPFKE, 1980, p. 361-362).

> Em toda a regra de sociedade aparecem sempre quatro números em proporção, dos quais três são conhecidos e um é desconhecido. Exemplificando: Se 100 moedas (Rotuli) correspondem a 40 onças (libri), quanto corresponderá 5 moedas?
>
> l. R.
>
> 40 100
>
> 5
>
> Multiplique as posições contrárias entre si (sugere multiplicar 40x5) e divida pela restante (dividir por 100).

Em livros como o de Fibonacci, as regras de resolução eram apresentadas sem explicações detalhadas. Ainda muito distante de uma simbologia como a moderna, ele resolveu o problema, por meio do auxílio de um esquema. Naturalmente, o esquema já é uma representação e constitui-se num avanço em relação ao uso exclusivo da linguagem natural ou retórica.

Gioseffo Zarlino (1517-1590) introduziu, na música, uma escala chamada de natural ou justa, usando proporções. Sugerimos a leitura do livro de Gean Pierre Campos, intitulado *Música e Matemática na Educação: é possível* (2012), em que ele apresenta atividades de construção de escalas musicais, empregando o conceito de proporcionalidade. São atividades simples que podem ser realizadas em sala de aula, com algum conhecimento mínimo de música.

Em 1795, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) escreveu um livro sobre matemática elementar baseado em suas aulas, na Escola Normal. Nele afirmou:

> Da teoria das proporções dependem muitas das regras da aritmética pois ela é primeiramente o fundamento da famosa regra de três de uso tão generalizador: sabemos que quando temos os três primeiros termos, para obtermos o quarto, basta multiplicar os dois últimos, um pelo outro e dividir o produto pelo primeiro. Pensou-se em seguida em várias outras regras específicas que se encontram na maioria dos livros de aritmética. Entretanto, podemos viver sem elas quando concebemos as características da questão: existem as regras diretas, inversas, simples e compostas. As regras de companhia, de ligação, etc, tudo se reduz a regra de três. Temos apenas que considerar como se encontra a questão e colocar convenientemente os termos da proporção (LAGRANGE, 2013, p. 47).

Segundo suas palavras, "tudo se reduz à regra de três", tudo se reduz à proporção, mas as aplicações na aritmética são inesgotáveis. Podemos viver sem muitas fórmulas derivadas da regra de três, mas não sem ela, pois ela é fundamento. Com isso, o matemático Lagrange disse o essencial sobre a proporcionalidade.

Retomando as nossas perguntas iniciais, acreditamos em ter motivado um pouco o leitor sobre a história das proporções e ter respondido a um dos porquês, que justificam seu estudo. Para um maior aprofundamento, sugerimos além das leituras indicadas, buscar outras atividades, envolvendo proporções para tornar suas aulas mais dinâmicas e agradáveis. Use vídeos[5] que abordem o conceito de proporcionalidade, para que os alunos possam visualizar a riqueza desse conceito.

Referências

ABDOUNUR, O. J. **Uma abordagem histórico/didática de analogias envolvendo razões e proporções em contexto musical: um ensaio preliminar.** *Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.14, n.3, pp.386-397, 2012.*

ALMEIDA, M. C. **Origens da matemática**. Progressiva: Curitiba, 2011.

CAMPOS, G.P. **Música e matemática na educação: é possível**? Vitória: Faculdade de Música do Espírito Santo, 2012.

HEATH, S. T. **A history of greek mathematics**. v.1. New York: Dover, 1981.

LAGRANGE, J. L. **Lições sobre matemáticas elementares**. Livraria da Física: São Paulo, 2013.

Miguel, A. ; Brito, A.; Carvalho, D.; Mendes, I. **História da Matemática em atividades didáticas**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

5 Consulte os seguintes livros: **Videos didáticos de história da matemática**: produção e uso na educação básica de Benedito Machado e Iran Mendes (São Paulo, Livraria da Física, 2013) e **Publicações sobre História da Matemática** de Iran Mendes e Circe Mary Silva da Silva (São Paulo, Livraria da Física, 2013)

REIS, A.; REIS, L. **Curso Elementar de Mathematica**. Aritmética. 2. ed. Francisco Alves: Rio de Janeiro, 1902.

SÁ, C. C. Theory of proportion and geometry of areas. In: John Fauvel e Jan van Maanen (Ed.) **History in Mathematics Education**. Kluwer: Dordrecht, 2000. p. 276-279.

TROPFKE, J. **Geschichte der Elementarmathematik**. Walter de Gruyter: Berlin, 1980.

VITRUVIUS, M. P. **De Architectura libri decem**, Veneza, 1567.