

A ARITMÉTICA DE LOCALIZAÇÃO DE JOHN NAPIER PARA A MULTIPLICAÇÃO

Jeniffer Pires De Almeida (UECE)

jeniffer.almeida@aluno.uece.br

Ana Carolina Costa Pereira (UECE)

carolina.pereira@uece.br

Resumo

Descrito pelo estudioso das matemáticas, John Napier (2017, p. 727, tradução nossa), como “mais como uma brincadeira do que um trabalho”¹, o método de aritmética em uma superfície plana utilizando um tabuleiro de Xadrez é uma maneira de realizar operações “difíceis” de aritmética, tais como adição, subtração, multiplicação, divisão e até extração de raízes, movendo simples peças de um lugar para o outro. Esse artigo traz, de forma divertida, os passos da manipulação desse instrumento de cálculo para a operação de multiplicação utilizando esse método.

INTRODUÇÃO

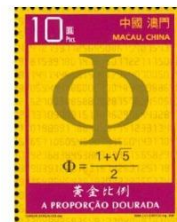
John Napier, mais conhecido como o inventor dos Logaritmos, dedicou boa parte de sua vida ao estudo das matemáticas, buscando métodos que facilitassem os cálculos aritméticos, o qual dizia ser “grandes e tediosos”. Uma de suas obras nesse âmbito foi o *Rabdologiae, Seu Numerationis Per Virgulas Libri Duo*, um tratado publicado em 1617, no qual Napier apresenta três instrumentos usados para operações da Matemática Básica.

Esse tratado é dividido em quatro livros, onde estão descritos a construção e manuseio desses instrumentos, o último desses livros é o Aritmética de Localização, que contém 41 páginas, distribuídas em 11 capítulos, no qual Napier apresenta um método de realizar cálculos aritméticos utilizando um “Tabuleiro de Xadrez”.

O TABULEIRO DE XADREZ NA ARITMÉTICA DE LOCALIZAÇÃO DE JOHN NAPIER

A Aritmética de Localização de John Napier é um método que utiliza um “Tabuleiro de Xadrez” para realizar operações da Matemática básica, simplesmente movendo peças de um lado para outro. Tanto a construção desse instrumento, como o seu manuseio segue algumas regras descritas por Napier, as quais serão discutidas.

¹ Em inglês, lê-se: “as more of a lark than a labour”.



Para a construção desse aparato toma-se uma placa que será o tabuleiro. Em seguida, determina-se o valor do número com que o usuário deseja operar. O passo seguinte é dividir as laterais da placa em partes iguais devendo o número de partes coincidir com o número escolhido pelo usuário. Essas faixas laterais serão chamadas de Aritméticas Lineares. Em seguida, se preenche as subdivisões nas Aritméticas Lineares, de modo que, cada uma das sessões seja denotada por uma letra obedecendo a ordem alfabética; essas letras são denominadas *números locais*. A esses números são atribuídos valores “por um processo contínuo de duplicação”² (NAPIER, 2017, p. 728, tradução nossa).

Depois disso devem ser desenhadas linhas (paralelas) que vão de um dos lados até seu lado oposto. O mesmo processo é feito tanto no sentido horizontal quanto no sentido vertical, de modo que o tabuleiro fique dividido, horizontalmente e verticalmente, em pequenos quadrados, que chamaremos de posições. A título de exemplo, apresentamos na figura 1 um tabuleiro, elaborado segundo este método.

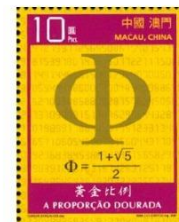
Figura 1 - Tabuleiro de Xadrez de John Napier

								h	128
								g	64
								f	32
								e	16
								d	8
								c	4
								b	2
								a	1
	h	g	f	e	d	c	b	a	
128	64	32	16	8	4	2	1		

Fonte: Elaborado pelas autoras

É importante ressaltar que qualquer tabuleiro construído calculará todos os números menores que o dobro do último número preenchido nas Aritméticas Lineares, seja ela a vertical ou horizontal, já que ambas têm o mesmo valor. Ou seja, o tabuleiro do

² Em inglês, lê-se: “by a continual process of doubling”.



nosso exemplo (Figura 1) irá operar com todos os números menores que 256, já que o último valor nas laterais é o 128.

Construído o nosso tabuleiro, precisamos entender como se dá a disposição das peças sobre ele e como estas se movimentam. A respeito da distribuição das peças, Napier (2017, p.727, tradução nossa) explica que “os números que ele usa [método de Aritmética de Localização] diferem dos números comuns, de modo que é necessário começar expressando os números comuns em uma nova forma”³.

Isto é, para operarmos com qualquer número natural, usando a Aritmética de Localização, precisamos modificá-los para número local. Caso o valor escolhido para realizar a operação já esteja grifado nas margens do tabuleiro, nós já temos a letra correspondente a ele, mas se não estiver precisamos convertê-lo afim de encontrar o número local equivalente.

Para realizar essa mudança iremos utilizar um método por subtração, que consiste em escolher a partir do número fornecido, um número na lateral do tabuleiro que seja mais próximo, porém menor que o primeiro, e, ao realizar a subtração entre eles, executar o mesmo processo com o restante, até que o número fornecido seja totalmente usado, sempre colocando uma peça em cada uma das posições encontradas pelo processo. A fim de exemplificar, iremos converter o número 13.

Primeiramente devemos selecionar, a partir do número dado, o número na Aritmética Linear (lateral do tabuleiro) mais próximo, porém menor que o mesmo, que no nosso caso seria o 8, representado pela letra *d*, em seguida devemos subtrair o número escolhido do número dado, resultando em 5, a partir desse resto realizamos o mesmo processo, escolhendo então o número 4 (*c*) e fazendo a subtração entre eles, resultaremos em 1 e então diminuindo pelo próprio 1 na posição *a* teremos usado todo o número. Logo, o valor 13 pode ser representado da seguinte maneira:

$$8+4+1 = acd$$

Lembrando que temos que identificar cada uma das posições encontradas no processo de conversão com uma peça. Então nossa Aritmética Linear ficaria da seguinte forma (Figura 2):

³ Em inglês, lê-se: “the numbers it uses differ from ordinary numbers, so that one must begin by expressing ordinary numbers in the new form”.

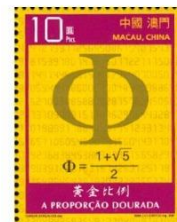


Figura 2 – Aritmética Linear representando o número 13 em notação local

h	128
g	64
f	32
e	16
●	8
c	4
●	2
●	1

Fonte: Elaborado pelas autoras

Um número em sua forma local é importante para realizar operações utilizando a Aritmética de Localização, porém, ao finalizar a operação desejada, precisamos convertê-lo novamente, mas agora para sua forma comum. Para isso utilizamos o método por adição, que significa reunir os números locais nas posições marcadas e somar os valores correspondentes a eles. Exemplaremos convertendo o número local *eba*.

Para tal, necessitamos encontrar os valores equivalentes a cada letra do nosso número local, desse modo temos que, a letra *a* corresponde ao valor 1, a letra *b* ao valor 2 e a letra *e* ao valor 16, com isso basta somarmos esses valores para acharmos o nosso número comum, que será 19.

$$1+2+16 = 19$$

Outro procedimento significativo, no que diz respeito ao número em sua forma local, é o designado Abreviação. Segundo Napier (2017, p.734, tradução nossa) “abreviação significa que dois contadores em uma determinada posição são substituídos por um na próxima posição superior”. Ou seja, se temos um número local *addf*, podemos substituir os dois *ds* por um único *e*, ou substituir as duas peças na posição *d* 8, por uma só peça na posição *e* 16 (Figura 3). A abreviação é um processo de equivalência, já que não modifica o valor do número fornecido.

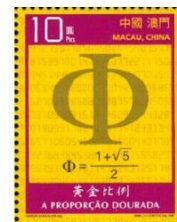
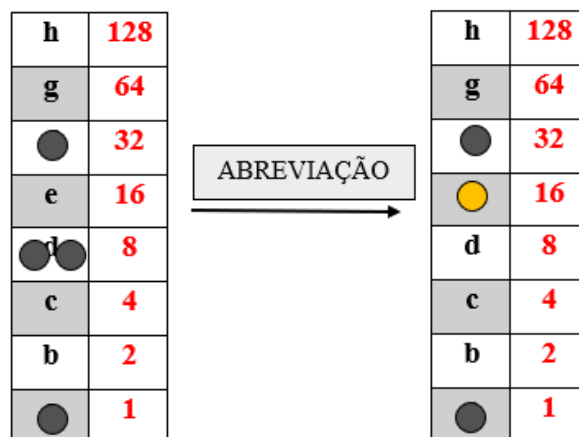


Figura 3 – Representação do processo de Abreviação

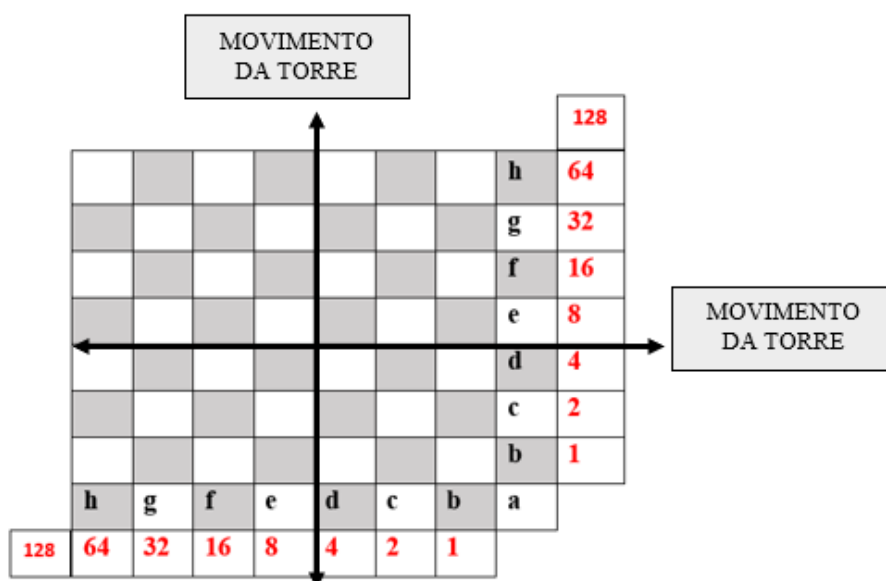


Fonte: Elaborado pelas autoras

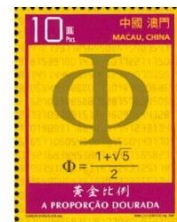
O método de Abreviação é bastante útil quando estivermos operando utilizando o Tabuleiro de Xadrez de Napier.

Segundo o autor, há duas formas de movimentar as peças no tabuleiro. A primeira delas é imitando o movimento da torre no jogo tradicional de xadrez, ou seja, paralelamente às linhas do tabuleiro. A segunda forma imita o movimento do bispo, ou seja, as peças se movimentam paralelamente à diagonalmente linhas do tabuleiro (Figura 4).

Figura 4 – Representação do Movimento da Torre na Artimética de Localização

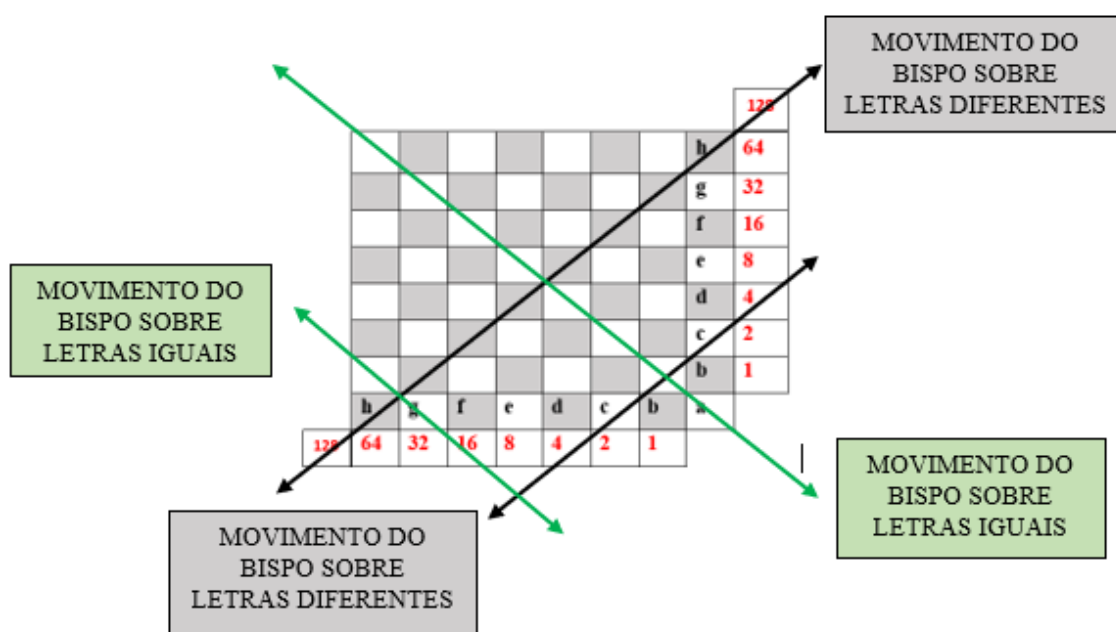


Fonte: Elaborado pelas autoras



Já o movimento do bispo prossegue de um canto da placa para a diagonal no canto oposto u em movimentos paralelos a esse. É interessante destacar que esse deslocamento ocorre sobre letras iguais ou sobre letras diferentes, como apontado na imagem a seguir (Figura 5).

Figura 5 – Representação do Movimento do Bispo na Aritmética de Localização



Fonte: Elaborado pelas autoras

Com base nesses movimentos, Napier apresenta dois axiomas que irão nos auxiliar a compreender melhor tanto a locomoção dessas peças, quanto a como se dá o preenchimento do restante do tabuleiro.

No primeiro axioma Napier (2017, p.739, tradução nossa) fala que “no movimento reto (como o movimento da torre), o valor de cada espaço é o dobro do anterior, seja para a esquerda ou para a direita”. Melhor dizendo, o padrão de que um número cresce sendo o dobro do anterior não acontece só nas laterais, mas em todo o instrumento, por exemplo, se observarmos a linha 2 do nosso tabuleiro, toda ela será preenchida da mesma forma que a Aritmética Linear, porém começando a partir do primeiro número escrito, seja na linha ou na coluna correspondente (Figura 6).

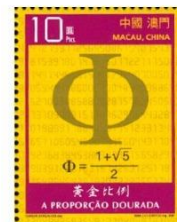


Figura 6 – Demonstração do Axioma 1 de Napier

									128
						i	h		64
						h	g		32
						g	f		16
						f	e		8
						e	d		4
						d	c		2
	i	h	g	f	e	d	c	b	1
	h	g	f	e	d	c	b	a	
128	64	32	16	8	4	2	1		

↑
COLUNA 2

← LINHA 2

Fonte: Elaborado pelas autoras

Já no segundo axioma o autor informa que “todos os quadrados na diagonal entre duas letras idênticas têm o mesmo valor como o número anotado em qualquer margem e devem ser marcados (pelo menos potencialmente) pelas mesmas letras” (NAPIER, 2017, p.739, tradução nossa). Isto é, como vimos um dos movimentos do bispo ocorre sobre letras iguais, logo todas as posições de uma diagonal qualquer têm o mesmo valor que o apontado em suas margens, como podemos ver nas diagonais 7 ou 3, por exemplo (Figura 7).

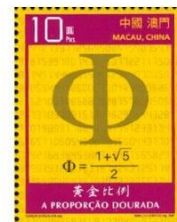
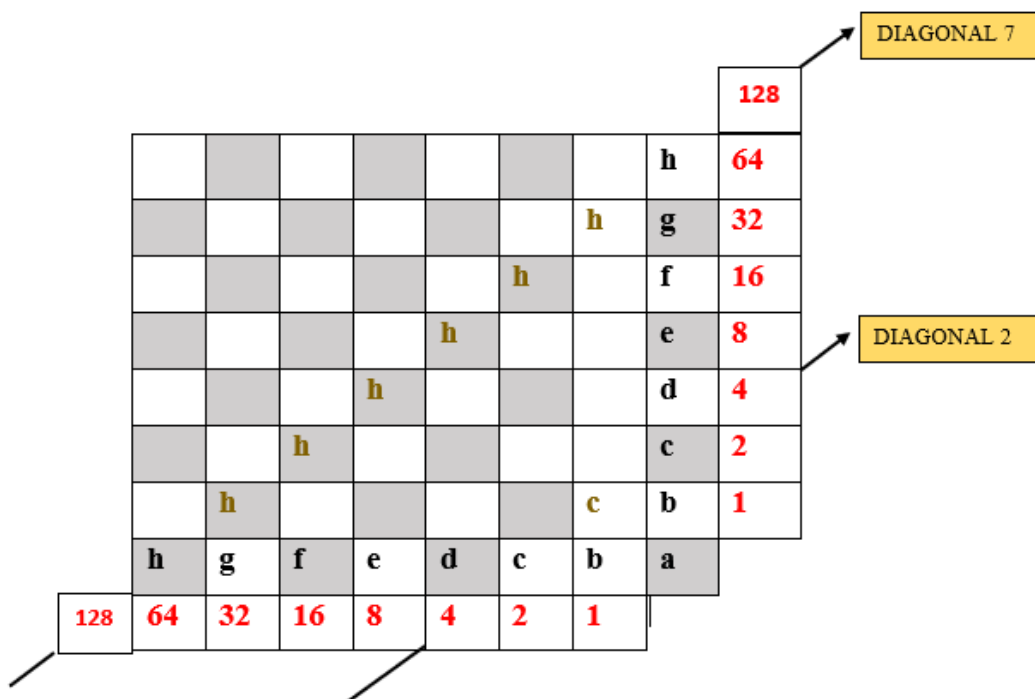


Figura 6 – Demonstração do Axioma 2 de Napier



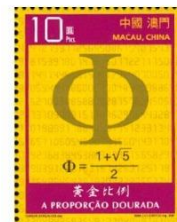
Fonte: Elaborado pelas autoras

Sendo compreendido todos esses processos e regras relacionados à construção e aos movimentos das peças no tabuleiro, podemos realizar qualquer operação que ele nos propõe. Porém nesse estudo iremos nos apropriar desse instrumento para realizar a operação de multiplicação.

MULTIPLICANDO DOIS NÚMEROS NATURAIS COM O TABULEIRO DE XADREZ

Existem duas formas de realizar a operação de multiplicação utilizando a Aritmética de Localização no “Tabuleiro de Xadrez”. Uma delas é quando o multiplicador e o multiplicando já estão presentes no tabuleiro, ou seja, quando já temos os números locais referentes a eles. Outra forma é quando os números que desejamos operar precisam ser convertidos de modo a encontrar suas representações locais.

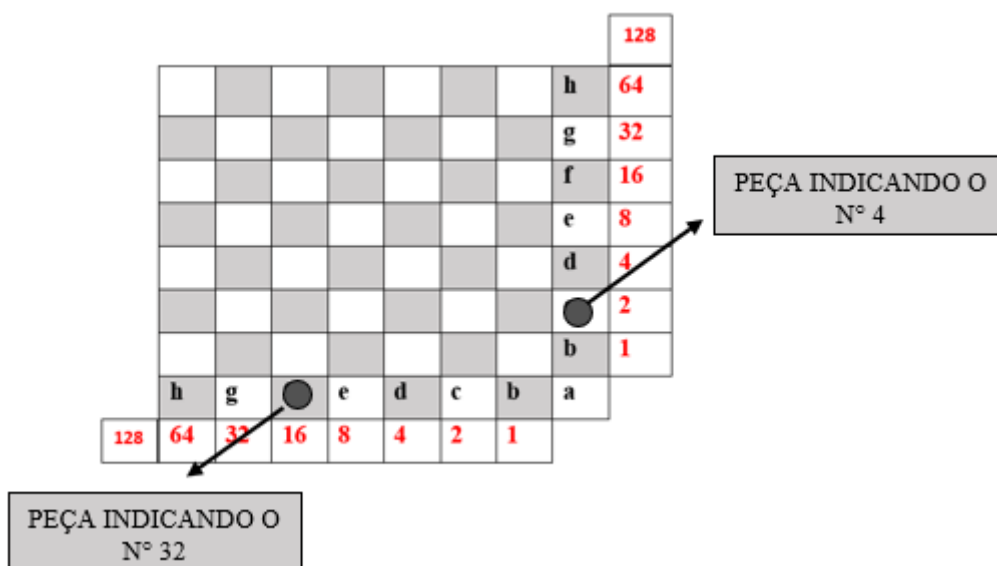
É importante ressaltar que, em ambas as formas de efetuar essa multiplicação, os dois fatores a serem operados devem ser representados em margens diferentes, isto é, se



o multiplicador estiver representado na Aritmética Linear horizontal, o multiplicando deve ser denotado na Aritmética Linear vertical, e vice versa.

Com isso, se quisermos multiplicar dois números que já têm suas representações locais, basta indicarmos cada um deles em margens diferentes, colocando uma peça na posição dos números locais correspondentes. Para melhor compreensão iremos multiplicar o número 32 por 4, ambos já presentes no tabuleiro sendo representados pelas letras *f* e *c* respectivamente, começando por suas representações nele (Figura 8).

Figura 8 – Representação dos números na operação de multiplicação



Fonte: Elaborado pelas autoras

Após indicarmos esses números no tabuleiro, deslocaremos essas peças de acordo com o movimento da torre, sendo a peça representada na linha movida para cima e a peça da coluna movimentada para o lado, de modo a encontrar a interseção entre esses movimentos (Figura 9).

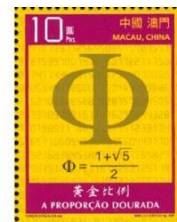
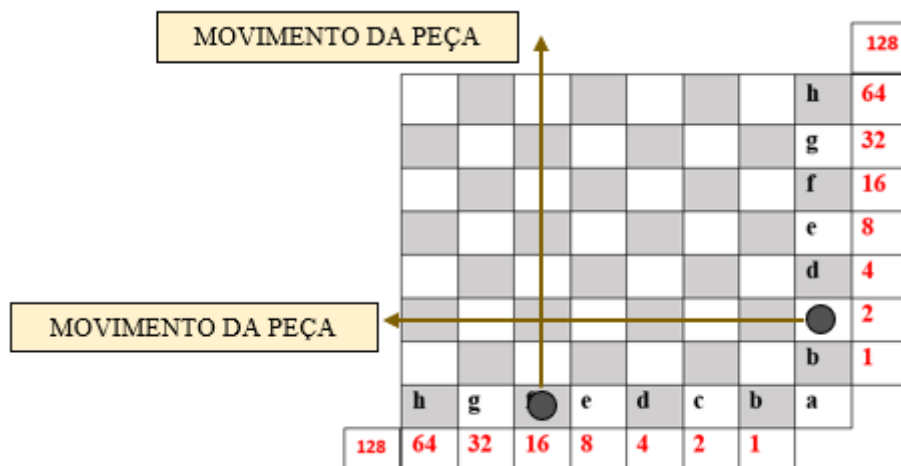


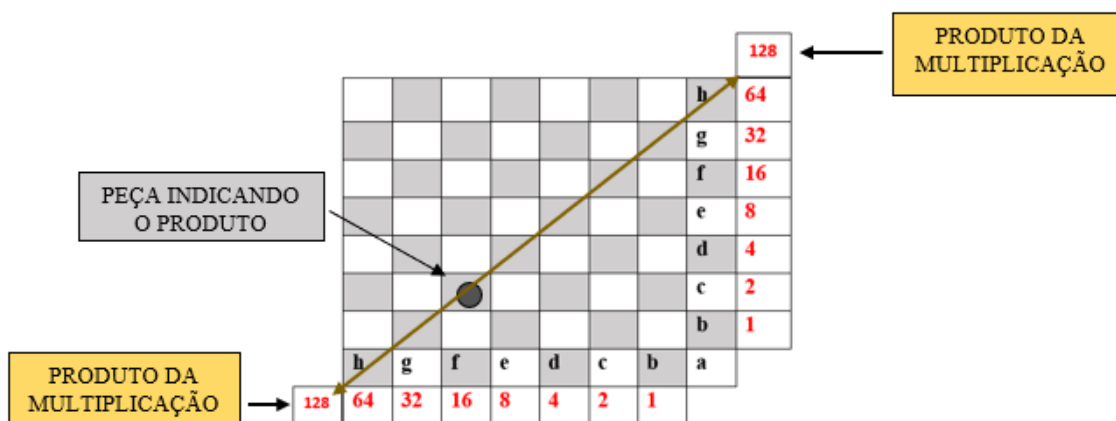
Figura 9 – Representação dos movimentos na operação de multiplicação



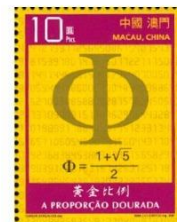
Fonte: Elaborado pelas autoras

Achado o encontro desses movimentos, devemos indicá-lo também com uma peça e em seguida precisamos deslocar a mesma, mas agora com o movimento do bispo na diagonal entre letras iguais, por toda essa diagonal ter o mesmo valor, podemos movimentá-la para qualquer uma das margens. O valor representado nessas margens será o produto dessa multiplicação (Figura 10).

Figura 10 – Representação do produto da multiplicação



Fonte: Elaborado pelas autoras



Contudo, se quisermos operar com números que não tenham suas representações de imediato, precisamos convertê-los e denotá-los, usando o método por subtração já demonstrado. Para exemplificar essa operação, Napier (2017) multiplica o número 19 por 13, assim sendo, iremos refazer esse caso.

Primeiramente devemos encontrar os números locais referentes a cada um desses valores a serem multiplicados e indicar com peças as posições achadas. Realizando o método por subtração com esses números temos que o 19 pode ser representado por abe^4 em notação local, e o número 13 por acd^5 . Com isso basta colocarmos as peças no tabuleiro para demonstrá-los, cada um em uma margem (Figura 11).

Figura 11 – Representação dos números convertidos, na operação de multiplicação



Fonte: Elaborado pelas autoras

Da mesma forma do exemplo anterior, precisamos deslocar todas as peças com o movimento da torre, afim de encontrar as interseções entre eles e demarcar as mesmas com outras peças, como na imagem a seguir (Figura 12).

⁴ $e 16 + b 2 + a 1 = 19$

⁵ $d 8 + c 4 + a 1 = 13$

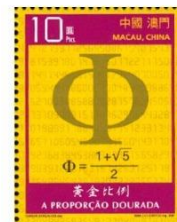
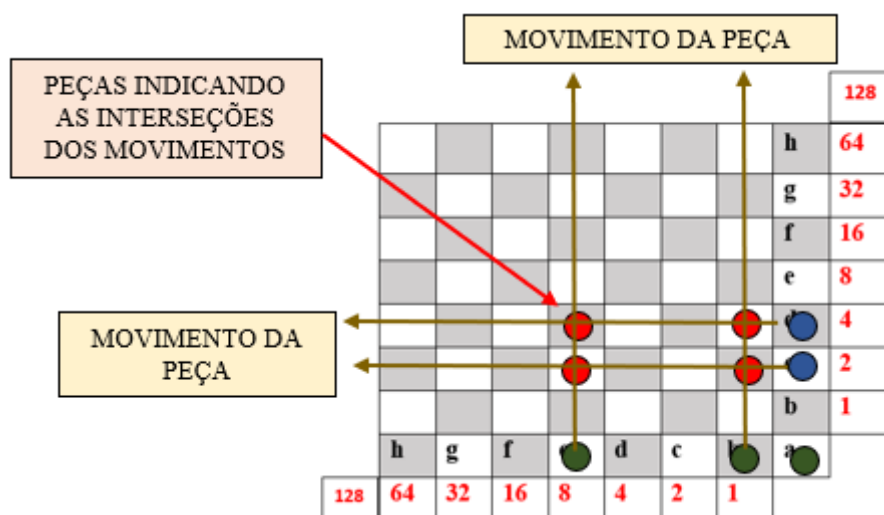


Figura 12 – Representação dos movimentos na multiplicação de 19 por 13



Fonte: Elaborado pelas autoras

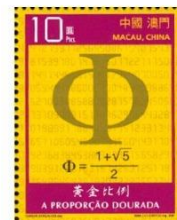
Feito isso, observamos que nosso tabuleiro contém 9 peças, no qual as mesmas já indicam a multiplicação dos valores fornecidos, porém precisamos encontrar esse número, para isso deslocaremos cada uma dessas peças com o movimento do bispo pelas diagonais que possuem o mesmo valor. No entanto, precisamos destacar que esses movimentos seguem uma regra, aquela indicada pelo processo de abreviação já retratado.

O método de abreviação nos diz que podemos substituir dois contadores que estiverem em uma posição por um único na próxima posição superior, não obstante, vimos que todas as posições de uma diagonal entre duas letras iguais possuem o mesmo valor representado por essas letras, dessa forma, somos capazes de realizar esse processo utilizando também essas diagonais. Melhor dizendo, se uma diagonal do nosso tabuleiro possuir duas peças, podemos substituí-las por uma na próxima diagonal superior.

Desse modo, faremos esse procedimento com as peças da multiplicação do nosso exemplo. Sempre que tivermos uma só peça na diagonal, moveremos ela para o seu valor correspondente na margem, mas caso tenhamos duas peças utilizaremos o método de abreviação (Figura 13).

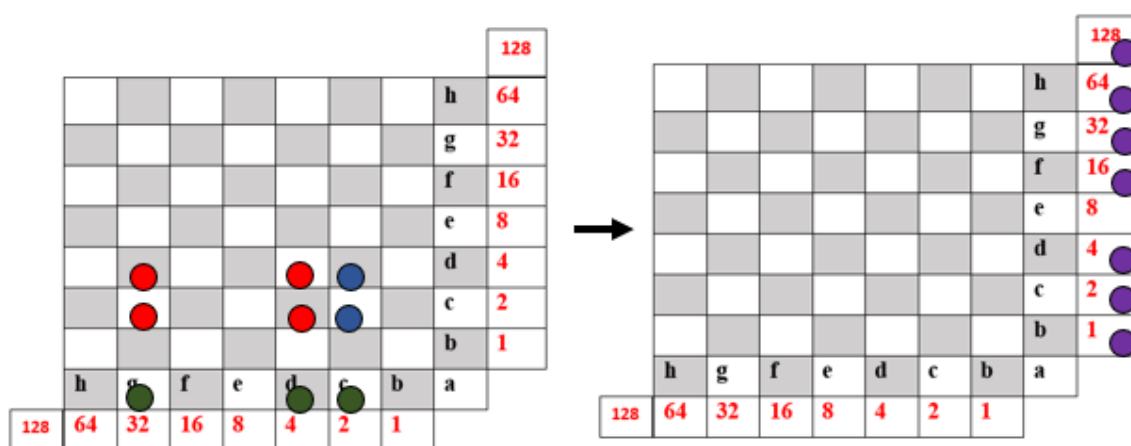
Esse processo é descrito pelo autor da seguinte forma:

Transfira o contador no tabuleiro do ângulo comum entre 1 e 1 a 1 para a margem direita, e o contador entre 2 e 2 a 2 para a margem direita. Novamente, para o contador entre 4 e 4 deixe um único contador ser colocado na mesma margem em 4. Em vez dos contadores entre 8 e 8, que devem ser removidos, deixe um único contador ser colocado no tabuleiro entre 16 e 16. Existem agora três contadores no tabuleiro entre 16 e 16, para os quais deixe um único



contador ser colocado na margem acima mencionada em 16 e outro no tabuleiro entre 32 e 32. Como este é o único nesta linha, deve ser transferida para a margem em 32. Existe outro contador no tabuleiro, entre 64 e 64, que (como é o único nesta linha) eu transfiro para a margem em 64. Por último, há um contador no tabuleiro entre 128 e 128, e como este é o único, eu o transfiro para a margem em 128. (NAPIER, 2017. p. 741, tradução nossa)

Figura 13 – Representação das peças antes e depois da abreviação e movimentação do bispo na multiplicação



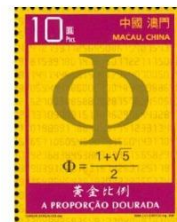
Fonte: Elaborado pelas autoras

Ao finalizar esse processo, basta somarmos os números demarcados pelas peças na margem do tabuleiro para termos o nosso resultado. Logo, a soma $128 + 64 + 32 + 16 + 4 + 2 + 1$ resultará em 247, que será o produto da multiplicação de 19 por 13.

NOTA FINAL

Nesse artigo apresentamos o método Aritmética de Localização, que utiliza um “Tabuleiro de Xadrez” para realizar, de forma divertida, operações básicas da Matemática, simplesmente movendo peças de um lugar para outro. Nesse estudo mostramos como utilizar esse artifício para a operação de multiplicação, porém com o mesmo somos capazes de fazer adição, subtração, divisão e até extração de raízes quadradas.

Notamos ainda que ele possui um grande potencial didático em sua construção também, podendo ser explorado a partir dela nas aulas de matemática. Portanto, com esse instrumento podemos realizar cálculos aritméticos como um jogo.



REFERÊNCIAS

NAPIER, J. **Rabdologiae, Seu Numerationis Per Virgulas**: cum appendice de expeditissimo Multiplicationes promptuario, quibus accessit e arithmeticea localis liber unus. In: RICE, B.; GONZÁLEZ-VELASCO, E.; CORRIGAN, A. *The Life and Works of John Napier*. Cham: Springer, 2017. p. 652-74.