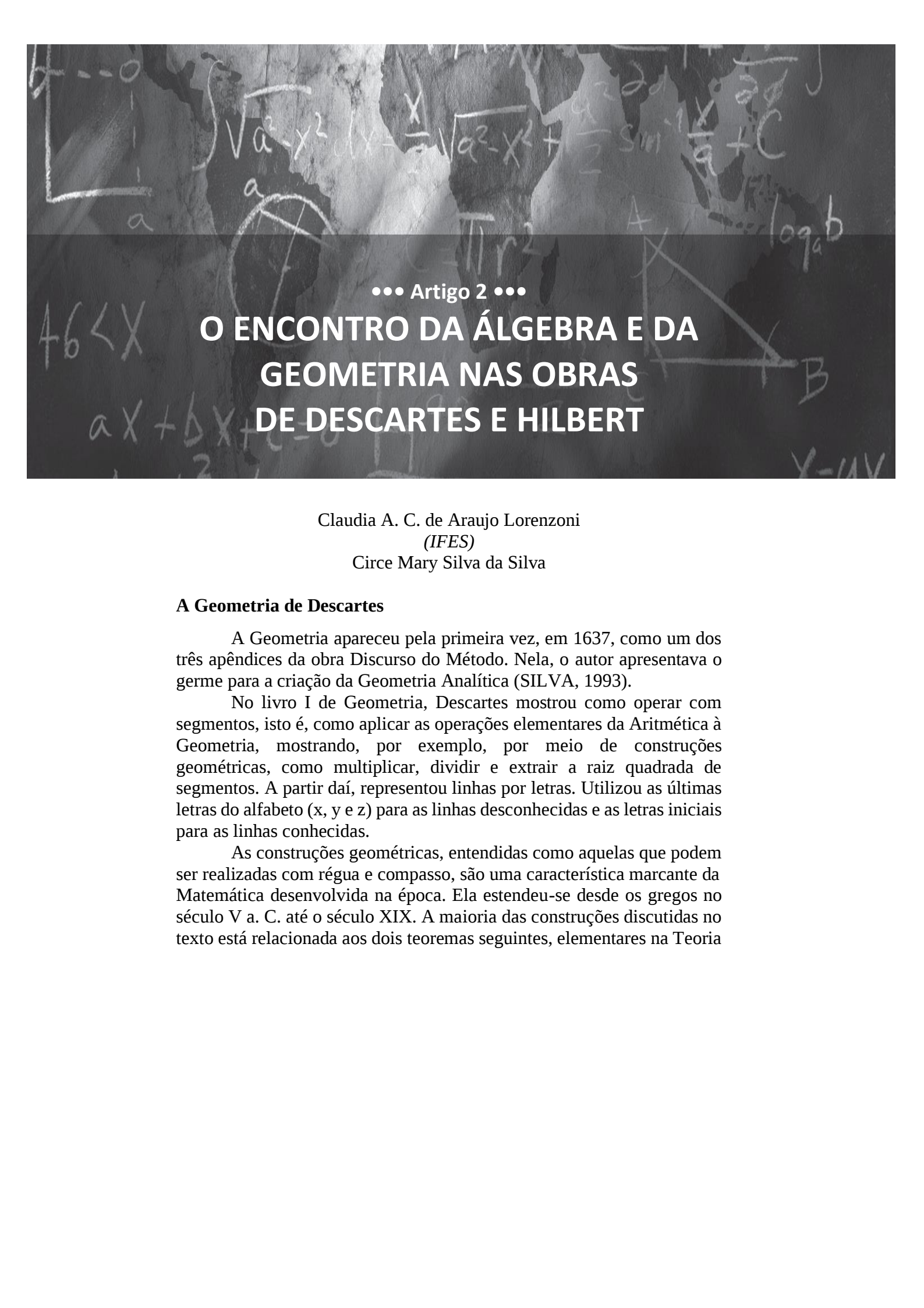




••• Artigo 2 •••

O ENCONTRO DA ÁLGEBRA E DA GEOMETRIA NAS OBRAS DE DESCARTES E HILBERT

Claudia A. C. de Araujo Lorenzoni
(IFES)

Circe Mary Silva da Silva

A Geometria de Descartes

A Geometria apareceu pela primeira vez, em 1637, como um dos três apêndices da obra *Discurso do Método*. Nela, o autor apresentava o germe para a criação da Geometria Analítica (SILVA, 1993).

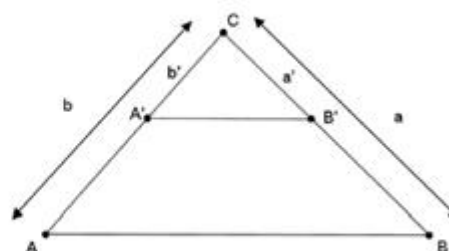
No livro I de Geometria, Descartes mostrou como operar com segmentos, isto é, como aplicar as operações elementares da Aritmética à Geometria, mostrando, por exemplo, por meio de construções geométricas, como multiplicar, dividir e extrair a raiz quadrada de segmentos. A partir daí, representou linhas por letras. Utilizou as últimas letras do alfabeto (x, y e z) para as linhas desconhecidas e as letras iniciais para as linhas conhecidas.

As construções geométricas, entendidas como aquelas que podem ser realizadas com régua e compasso, são uma característica marcante da Matemática desenvolvida na época. Ela estendeu-se desde os gregos no século V a. C. até o século XIX. A maioria das construções discutidas no texto está relacionada aos dois teoremas seguintes, elementares na Teoria

das Proporções de Euclides. Dados os triângulos ABC e A'B'C (Figura 1), podese afirmar que:

- 1) Se $AB \parallel A'B'$ então $a:b=a':b'$;
- 2) Se $a:b=a':b'$ então $AB \parallel A'B'$.

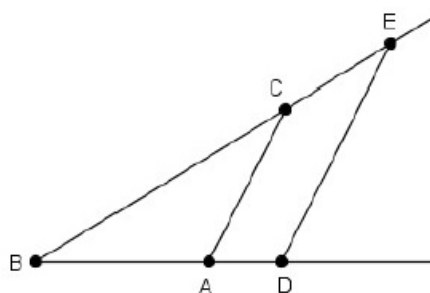
Figura 1 – Triângulos ABC e A'B'C¹



Fonte: As autoras.

A multiplicação de segmentos (Figura 2) é a primeira que aparece na obra de Descartes: "Seja por exemplo AB a unidade, e seja requerido multiplicar BD por BC. Eu tenho somente que unir os pontos A e C, depois tirar DE paralela a CA, e BE é o produto procurado" (DESCARTES, 1894, p.2).

Figura 2 – Multiplicação de segmentos segundo Descartes



Fonte: Descartes, 1894, p.2.

Ou seja, para multiplicar dois segmentos BD e BC como Descartes, podemos desenhar o segmento BD, marcando nele o ponto A, que dista 1 unidade de B; o outro segmento deve ser desenhado com vértice em B e um ângulo qualquer a partir de BD. Unimos a extremidade C ao ponto A, extremo do segmento unitário, e traçamos, a partir do ponto D, uma paralela a AC, que determina o ponto E. O segmento BE é, então,

¹ Todas as figuras do artigo foram desenhadas pelas autoras, com recursos do software livre Geogebra.

o produto procurado.

Exemplo: Tome um segmento BD de medida 4cm e outro segmento BC de medida 2cm. Construa o segmento produto e confira!

De fato, sendo os triângulos ABC e DBE semelhantes, seus lados homólogos são proporcionais. Daí:

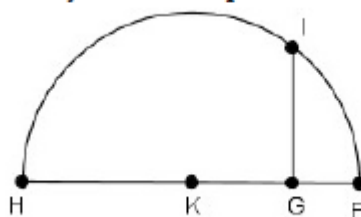
$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$$

Como BA é unitário, $BE = BD \times BC$ e BE representa o produto dos dois segmentos.

Raros são os exemplos numéricos que Descartes apresenta. Todavia, é conveniente tratar problemas que apresentem dados numéricos, levantando questões do tipo: O que aconteceria se tomássemos BD fracionário? O que aconteceria se o ângulo aumentasse ou diminuísse, isso alteraria a resposta? E se BA não fosse unitário, o que significaria BE e, nesse caso, seria possível afirmar que BE é o produto de BD por BC? Em sala de aula, pode-se explorar ao máximo estas questões para aprofundar e elucidar temas da Geometria e da Aritmética.

A respeito da extração da raiz quadrada (Figura 3), Descartes diz: É preciso tirar a raiz quadrada de GH, eu acrescento a ela a linha reta FG, que é a unidade, e divido FH em duas partes iguais no ponto K, do centro K tiro o círculo FKH, depois elevando o ponto G em linha reta até I, isto é com ângulo reto em relação a FH, GI é a raiz quadrada procurada (p.2).

Figura 3 – Construção da raiz quadrada do segmento GH



Fonte: Descartes, 1984, p.2.

A construção se baseia no fato de que o triângulo HIF, com vértices sobre uma circunferência, é retângulo, já que o segmento HF é diâmetro da circunferência, levando a um ângulo HIF de 90° , ou seja, metade do ângulo central HKF, de 180° . Pelas relações métricas no triângulo retângulo, concluímos que $IG^2 = HG \cdot GF$. Como GF é unitário, $IG^2 = HG$ e concluímos que:

$$IG = \sqrt{HG}.$$

Exemplo: Construa a raiz quadrada de um segmento de 4 unidades de comprimento.

Com o auxílio de uma régua graduada e de uma calculadora, para constatar as aproximações, podem ser exploradas outras raízes quadradas, como as de 2, 3, 5 e 7, que são irracionais.

Na Geometria de Descartes, encontramos o germe central do pensamento algébrico, que é tratar coisas desconhecidas como se fossem conhecidas. O objetivo do autor era partir de um problema geométrico e buscar uma equação algébrica que simbolizasse a situação dada.

Assim, querendo resolver qualquer problema, deve-se a princípio considerá-lo como feito e dar nomes a todas as linhas que pareçam necessárias para o construir, tanto aquelas que sejam conhecidas como as outras. Depois, sem fazer nenhuma diferença entre essas linhas conhecidas e desconhecidas, deve-se desenredar a dificuldade segundo a ordem que mostra mais naturalmente as relações entre estas linhas, até encontrar o meio de exprimir uma mesma quantidade de duas maneiras, o que nós chamamos uma equação, pois os termos de uma dessas formas são iguais aqueles da outra [...] (DESCARTES, 1894, p. 4).

Como exemplos de equações na obra, estão:

$$z = b; \text{ ou } z^2 = -az + bb; z^3 = az^2 + bbz - c^3; \\ z^4 = az^3 - c^3z + d^4, \text{ etc.}$$

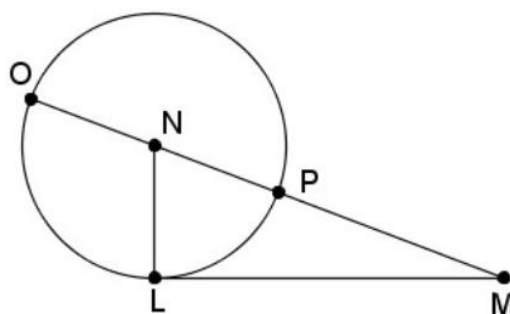
Não há equação do tipo $z^2 = -az - bb$. Uma tal equação, quando possui solução real, tem somente raízes negativas, as quais Descartes não abordou.

A resolução da equação $z^2 = az + b^2$ é tratada por Descartes do seguinte modo:

Esta raiz ou linha desconhecida se acha facilmente. Eu construo o triângulo retângulo NLM (Figura 4), cujo lado LM é igual a , raiz quadrada da quantidade conhecida b^2 , e a outra LN é $\frac{a}{2}$, a metade da outra quantidade conhecida que estava multiplicando z , que eu suponho ser a linha desconhecida. Depois prolongando MN até o ponto O , encontramos a linha OM , onde OM é z , a linha procurada, e ela se expressa dessa maneira:

$$z = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{z} + b^2} \text{ (DESCARTES, 1894, p. 6).}$$

Figura 4 – Construção das raízes da equação
 $z^2 = az + b^2$



Fonte: Descartes, p.6.

Notamos aqui que Descartes não faz qualquer alusão a outra raiz da equação, qual seja, $z = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{z} + b^2}$, que, neste caso, seria negativa.

Exemplo: Mostre, por meio de uma construção semelhante à da Figura 4, qual é o segmento que representa a raiz da equação $x^2 = 6x + 9$.

O autor explica, de forma muito sistemática, a resolução de cada equação, nas várias formas que ela pode ocorrer. No segundo exemplo, resolve a equação $y^2 = -ay + b^2$.

Suponhamos que eu tenho $y^2 = -ay + b^2$ e seja y a quantidade que se quer encontrar. Eu desenho o triângulo retângulo NLM e da base MN eu estendo NP igual a NL , e o resto PM é y , a raiz procurada. De maneira que eu tenho

$$y = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} \text{ (DESCARTES, 1894, p. 6).}$$

Exemplo: Mostre, através de uma construção semelhante, qual é o segmento que representa a raiz da equação $x^2 = -6x + 16$.

Para a equação $z^2 = az - b^2$, Descartes apresenta a seguinte resolução: Se eu tenho $z^2 = az - b^2$, eu faço NL igual a $\frac{a}{2}$ e LM igual a b , como anteriormente.

Figura 5 - Construção das raízes da equação $z^2 = az - b^2$



Fonte: Descartes, p.7.

Depois, em lugar de juntar os pontos MN , eu tiro uma paralela RQM a LN , e do centro N , por L (com raio LN) eu desenho um círculo que corta nos pontos Q e R , a linha procurada z é MQ , ou também MR . Neste caso, ela exprime-se de duas maneiras, a saber:

$$z = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2} \text{ e } z = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$$

E, se o círculo, que tendo como centro N passar pelo ponto L sem cortar a linha MQR , a equação não terá nenhuma raiz, de maneira que podemos assegurar que a construção do problema proposto é impossível.

É interessante observar que a resolução de equações desse tipo, por exemplo $z^2 = 2z - 4$, onde as raízes não são reais, pode ser ilustrada facilmente com a construção geométrica proposta por Descartes, pois o círculo não intersectará a perpendicular no ponto M , o que evidencia que a equação não tem raízes reais.

A resolução pelo método de Descartes de equações como $y^2 = 6y - 9$ ou $x^2 = 4x - 4$ ilustra, a partir de construções geométricas, o significado de raízes repetidas.

O importante na obra de Descartes é que a associação da Geometria com a Álgebra simbólica encoraja o desenvolvimento de técnicas algébricas, independentemente de visualizações geométricas. As quantidades desconhecidas são para ele variáveis. Outro aspecto relevante é a interpretação das potências. Descartes afirma que a^2 e a^3 são simples linhas, isto é, números, e não áreas e volumes, ou seja, ele desassocia a interpretação de potências de termos de dimensionalidade geométrica.

Os Fundamentos da Geometria por David Hilbert

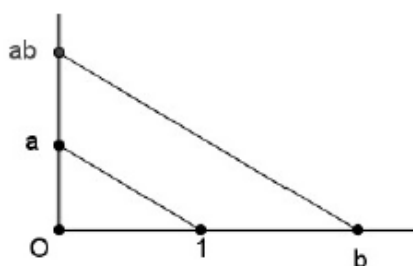
Na história da Geometria, o século XIX foi marcado pelo surgimento das geometrias não euclidianas. Essa nova Geometria chocou os mais conservadores, pois se opunha aos axiomas de Euclides, e criou uma necessidade ainda maior de uma estrutura formal e dedutiva para a Geometria. A tão desejada axiomatização da Geometria veio com os *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da Geometria) de Hilbert. Nessa obra, ele propôs um sistema de axiomas que pretendia ser consistente (impossível de levar a dois teoremas contraditórios a partir dos axiomas), independente (nenhum axioma é decorrência dos demais) e completo (tudo o que for usado na teoria está contido nos axiomas).

Pretendendo mostrar que a Geometria era tão consistente quanto a Aritmética, Hilbert associou os dois campos introduzindo um cálculo de

segmentos, no qual todas as regras dadas para os números reais são válidas. No lugar de “congruente” e “ $\equiv$ ” são usados a palavra “igual” e o símbolo “ $=$ ”.

Para definir geometricamente o produto de um segmento a por outro b , nos servimos da seguinte construção. Escolhemos, em primeiro lugar, um segmento arbitrário, que permanece invariável em tudo o que vamos considerar, ao que designamos por 1. Depois, sobre um dos lados de um ângulo reto (Figura 6) levamos, a partir do vértice O , os segmentos 1 e b e sobre o outro lado o segmento a .

Figura 6 – Multiplicação dos segmentos a e b



Fonte: Hilbert, p.66.

Unimos os extremos dos segmentos 1 e a por meio de uma reta e lhe traçamos uma paralela pelo extremo de b , que determina no outro lado um segmento c , a este segmento c lhe damos o nome de produto do segmento a pelo segmento b e escrevemos:

$$c = ab.$$

Exemplos: Usando o método de Hilbert, obtenha o produto dos segmentos a e b , com respectivamente, 3cm e 4cm. O que aconteceria se usássemos o método de Descartes?

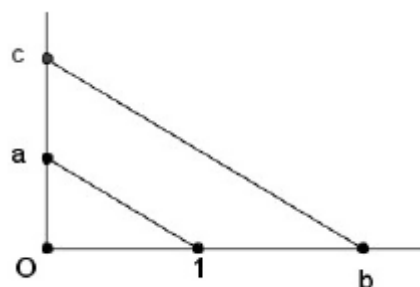
O cálculo de segmentos de Hilbert, tanto quanto o de Descartes, ilustra importantes propriedades numéricas. Por exemplo, é possível ver geometricamente que dado um número a entre zero e 1, temos $a^2 < a$, $a^3 < a^2$, $a^4 < a^3$ etc.

Hilbert (1953, p. 71) define o quociente de c e b da seguinte forma:

Sendo b e c dois segmentos quaisquer, existe sempre um segmento a tal, que se verifica a igualdade $c = ab$; este segmento a se representa por $\frac{c}{b}$ e se chama o quociente de c e b .

Ou seja, para obtermos a divisão, efetuamos uma construção inversa à multiplicação. Assim, escolhemos um segmento arbitrário, que designamos de 1 e levamos sobre um dos lados de um ângulo reto a partir do vértice O (Figura 7) os segmentos 1 e b , e sobre o outro lado o segmento c . Unimos os extremos dos segmentos b e c por meio de uma reta e lhe traçamos uma paralela pelo extremo de 1 determinando no outro lado o segmento $a = \frac{c}{b}$.

Figura 7 – Construção do quociente dos segmentos c e b

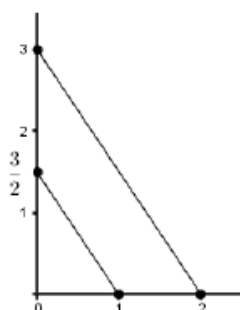


Fonte: As autoras.

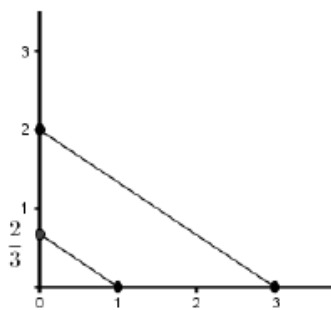
Essa construção nos permite observar, por exemplo, que $\frac{c}{b}$ não é necessariamente igual a $\frac{b}{c}$, ou seja, a operação de divisão não é comutativa. As Figuras 8 e 9 ilustram o que acontece com segmentos c e b , respectivamente de comprimentos 3cm e 2cm.

Figura 8 – Construção do quociente

$$\frac{3}{2}$$

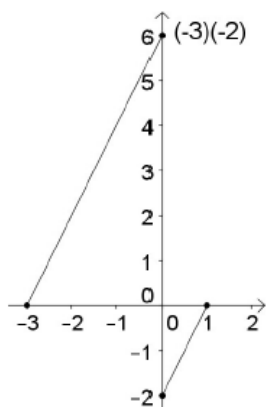


Fonte: As autoras.

Figura 9 – Construção do quociente $\frac{2}{3}$ 

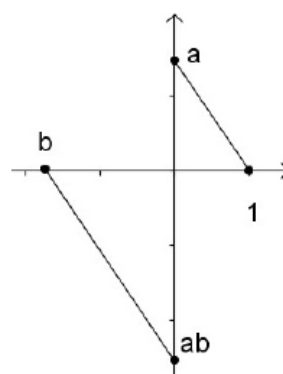
Fonte: As autoras.

Se introduzimos, à ideia de Hilbert, um sistema de coordenadas cartesianas, podemos determinar, geometricamente, o produto de quaisquer números reais a e b (ARAÚJO, 2000). Sobre o eixo x , fixamos nossa unidade, designada por 1 , e marcamos o ponto B de abscissa b . Sobre o eixo y , marcamos o ponto A de ordenada a . Para determinar o produto $a.b$, unimos os pontos 1 e A por meio de uma reta e lhe traçamos uma paralela passando por B que determina no eixo y um ponto C , cuja ordenada é exatamente o número $a.b$. Tal construção pode ilustrar exemplos da regra de sinais para o produto de números relativos (Figura 10 e Figura 11).

Figura 10 – Produto $(-3)(-2)$ 

Fonte: As autoras.

Figura 11 – Produto de um número positivo por um número negativo



Fonte: As autoras.

Podemos também fazer a determinação geométrica do quociente de um número real c por um número real não-nulo b . Mais uma vez, fixamos nossa unidade e marcamos sobre o eixo x o ponto B de abscissa b . Unimos os pontos C e B por meio de uma reta e lhe traçamos uma paralela passando por 1 , que determina no eixo y o ponto N de ordenada $\frac{c}{b}$.

Considerações finais

Neste artigo, apresentamos algumas visualizações geométricas que podem ser utilizadas em sala de aula para facilitar o entendimento de regras algébricas aparentemente abstratas e áridas para alguns estudantes, bem como a resolução de equações algébricas do segundo grau.

Descartes e Hilbert aplicaram Álgebra à Geometria, o primeiro com caráter mais instrumental de resolver problemas e o segundo buscando uma axiomatização. A comparação entre as duas abordagens é bastante ilustrativa e revela a mudança de um tratamento intuitivo para um mais formalizado. Esse caminho, que a própria Matemática percorreu, seria também mais adequado e significativo para o ensino. Ambas as abordagens nos levam a concordar com Stewart (1995, p.245), quando diz que “[...] embora a Matemática seja na sua raiz uma estrutura unificada, é também em cada instante uma estrutura inacabada”.

Referências

ARAUJO, C. Operações com segmentos segundo David Hilbert. Revista do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, SBM, n. 42. p. 11 - 14, 1º quadrimestre, 2000.

DESCARTES, R. Géométrie. In: COMTE, Auguste. La Géométrie Analytique d'Auguste Comte. Rio de Janeiro: Louis Bahl Livraire, Paris e F. Briguier Livraria, 1894.

HILBERT, D. Fundamentos de la Geometria. Tradução de Francisco Cebrian. Madrid: Instituto Jorge Juan, 1953.

SILVA, C. O desenvolvimento da Geometria Analítica e a influência de Descartes e Euler na obra de Auguste Comte. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, Curitiba, v. 14, n. 1/2, 1993. p. 51-77.

STEWART, I. Os problemas da Matemática. Lisboa: Ciência Aberta, Gradiva, 1995.