

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS: OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS COMO CONTEXTO DIDÁTICO PARA O ENSINO DE GEOMETRIA

Sebastião Martins Xavier¹

Thiago Fontes Santos²

Cyndi Menezes Pimentel³

RESUMO

Este artigo busca explorar como os três problemas clássicos da geometria grega, a saber, a duplicação do cubo, a trisseção do ângulo e a quadratura do círculo, podem ser usados como ponto de partida para ensinar geometria de forma mais significativa. A ideia central é entender de que maneira a combinação entre a História da Matemática e os conceitos algébricos pode ajudar na construção do aprendizado. Para isso, foi realizado um estudo teórico-conceitual fundamentado em pesquisa bibliográfica, que inclui tanto uma análise histórica das construções feitas com régua e compasso, como aparecem nos *Elementos* de Euclides, quanto uma discussão sobre o conceito de números construtíveis a partir da perspectiva da álgebra. Além disso, o trabalho apresenta demonstrações que mostram por que esses problemas não podem ser resolvidos usando apenas os métodos clássicos. Os resultados revelam que essas impossibilidades não são apenas limitações, mas pistas importantes que mostram a profunda ligação entre geometria e álgebra. Assim, conclui-se que abordar esses problemas a partir de um olhar histórico e conceitual não só fortalece o raciocínio lógico e dedutivo dos estudantes, como também ajuda a conectar diferentes áreas da matemática de maneira mais integrada.

Palavras-chave: História da Matemática. Ensino de Geometria. Números Construtíveis. Problemas Clássicos.

1 INTRODUÇÃO

Imagine propor aos seus alunos um desafio geométrico simples: duplicar o volume de um altar cúbico, dividir um ângulo qualquer em três partes iguais ou desenhar um quadrado com a mesma área de um círculo, usando apenas uma régua não graduada e um compasso. Esses são os três problemas clássicos da geometria grega: a duplicação do cubo, a trisseção do ângulo e a quadratura do círculo. Por trás da aparente simplicidade de seus enunciados, esconde-se uma trajetória de descobertas que mobilizou filósofos e geômetras por mais de dois milênios. Na Antiguidade Clássica, mentes brilhantes como Hipócrates de Quios e Arquimedes de Siracusa dedicaram-se a investigá-los, criando técnicas geométricas inovadoras. Muito além de meros

¹ Doutor em Matemática. Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), Ouro Preto, MG, Brasil. Email: semarx@ufop.edu.br. Orcid: <https://orcid.org/0009-0004-2765-0764>

² Doutor em Matemática. Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), Ouro Preto, MG, Brasil. Email: santostf@ufop.edu.br. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-2435-2786>.

³ Mestra em Educação Matemática. Professora no Estado de Minas Gerais, Ouro Preto, MG, Brasil. E-mail: cyndipimentel8@gmail.com. Orcid: <https://orcid.org/0009-0007-6491-9752>.

exercícios de desenho, esses desafios serviram como verdadeiros motores para o nascimento da álgebra moderna, abrindo caminho para conceitos fundamentais como a teoria de corpos e os números transcendentos (Boyer; Merzbach, 2011; Kline, 1990).

Historicamente, esses problemas mostram como questões elementares podem reorientar agendas inteiras de pesquisa matemática. A exigência de resolver as três tarefas com régua não graduada e compasso permaneceu ativa por séculos e só recebeu solução formal no século XIX, com recursos da álgebra moderna. Nesse momento, a discussão deixou de ser apenas geométrica e passou a depender de resultados sobre extensões de corpos, polinômios irredutíveis e transcendência (Stillwell, 2010).

Em contexto escolar, esse percurso histórico cumpre uma função pedagógica objetiva: situar a matemática como prática intelectual em revisão contínua, e não como coleção de regras acabadas (Fauvel; Van Maanen, 2000; Mendes, 2009). A narrativa histórica, quando acompanhada de tarefas de construção e argumentação, aproxima intuição geométrica, linguagem algébrica e justificação formal.

Discutir impossibilidade também tem valor formativo direto. O estudante percebe que 'não construir' pode ser resultado de demonstração, e não de falta de habilidade. Essa distinção ajuda na transição entre procedimentos operacionais e argumentação dedutiva, eixo central da educação matemática (Miguel; Miorim, 2004; Chaquiam, 2017).

Com esse enquadramento, o trabalho analisa os três problemas clássicos em três planos articulados: contexto histórico, prática de construções e formalização algébrica. O objetivo é oferecer ao professor um roteiro conceitual consistente para discutir, na mesma sequência didática, técnica de desenho, linguagem matemática e critérios de demonstração.

2 METODOLOGIA

A investigação foi desenvolvida por meio de pesquisa bibliográfica (Gil, 2008), orientada por uma abordagem teórico-conceitual voltada à análise histórica, matemática e didática dos três problemas clássicos da Geometria Grega. O percurso analítico foi organizado em três etapas: (i) reconstrução histórica dos problemas em fontes clássicas (Boyer; Merzbach, 2011; Eves, 2011); (ii) explicitação dos argumentos de impossibilidade com base na teoria de corpos e em resultados de álgebra (Cox, 2012; Stillwell, 2010); (iii) transposição didática para o ensino de geometria, dialogando com literatura de Educação Matemática (Fauvel; Van Maanen, 2000; Miguel; Miorim, 2004).

3 OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA GEOMETRIA GREGA

Os problemas clássicos da geometria grega são problemas de construção: dado um conjunto inicial de segmentos e ângulos, busca-se produzir novos elementos apenas com retas e circunferências. Essa restrição decorre dos três primeiros postulados do Livro I dos *Elementos* de Euclides (c. 300 a.C.): traçar uma reta entre dois pontos, prolongar segmentos e construir circunferências com centro e raio dados. A duplicação do cubo, a trisseção do ângulo e a quadratura do círculo, ilustrados na Figura 1, testam precisamente o alcance desse sistema de operações.

Figura 1 – Esquema ilustrativo dos três problemas clássicos da geometria grega



Fonte: elaboração dos autores.

Na duplicação do cubo (problema Deliano), deseja-se construir a aresta x de um cubo com volume duas vezes maior que o de um cubo de aresta a . Logo, $x^3 = 2a^3$, ou seja, $x = a \sqrt[3]{2}$. A tradição histórica associa o problema ao episódio de Delos, em que se teria pedido a ampliação de um altar cúbico dedicado a Apolo (Eves, 2011).

Na trisseção do ângulo, busca-se dividir um ângulo arbitrário ϕ em três partes de medida $\theta = \phi/3$. A bissecção de um ângulo é sempre realizável por construções euclidianas com régua e compasso, ao passo que a trisseção de um ângulo arbitrário, em geral, não é construtível por esses meios. Em termos algébricos, conhecido $\cos \phi$, devemos determinar $\cos \theta$ pela identidade $\cos \phi = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$. Para $\phi = 60^\circ$, com $y = \cos \theta$, obtém-se $8y^3 - 6y - 1 = 0$. O ponto central é que esse passo exige resolver um problema cúbico fora do escopo das operações quadráticas da régua e do compasso clássicos (Wantzel, 1837).

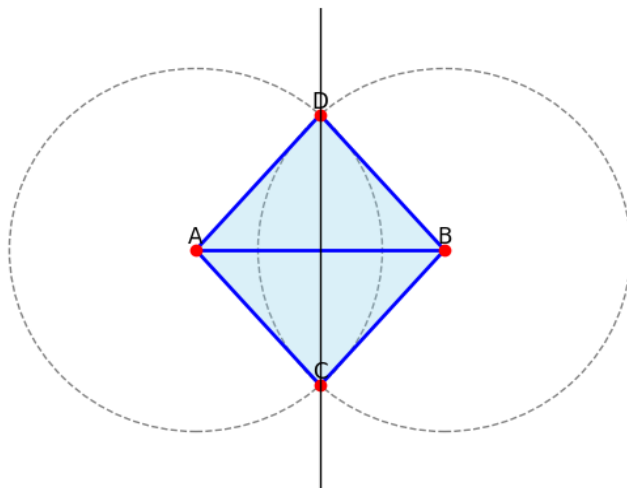
O problema da quadratura do círculo consiste em construir um quadrado de lado x cuja área seja igual à área S de um círculo de raio r . Como $S = \pi r^2$, precisamos de $x^2 = \pi r^2$, isto é, $x = r\sqrt{\pi}$. Para $r = 1$, seria necessário construir $\sqrt{\pi}$. O desfecho histórico é conhecido: em 1882, Lindemann provou que π é transcendente; portanto, $\sqrt{\pi}$ não pode ser construtível por régua e compasso (Lindemann, 1882; Martins; Vargas, 2024).

4 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO

As construções com régua e compasso usam dois tipos de ação: traçar retas por pontos dados e desenhar circunferências com centros e raios conhecidos. As interseções entre esses objetos geram novos pontos, que alimentam as etapas seguintes da construção.

Um exemplo prático e muito comum em sala de aula é a construção da mediatriz de um segmento (Wagner, 2007). Esse procedimento consiste em cruzar duas circunferências de mesmo raio centradas nos pontos finais do segmento, gerando uma reta perpendicular que passa exatamente pelo meio desse segmento (ver Figura 2). O passo a passo para realizar essa construção clássica com régua e compasso é a seguinte: (i) A partir do segmento AB, coloque a ponta seca do compasso no ponto A e abra-o com uma distância que seja visivelmente maior do que a metade do segmento AB, traçando um arco acima e abaixo de AB; (ii) Com a mesma abertura, repita o processo colocando a ponta seca no ponto B e faça novos arcos que cruzem os anteriores nos pontos C (na parte de baixo) e D (na parte de cima); (iii) Por fim, use a régua não graduada para desenhar a reta que une C e D. Essa reta é a mediatriz de AB, encontrando o segmento exatamente no seu ponto médio M.

Figura 2 – Mediatriz construída por interseção de circunferências



Fonte: elaboração dos autores.

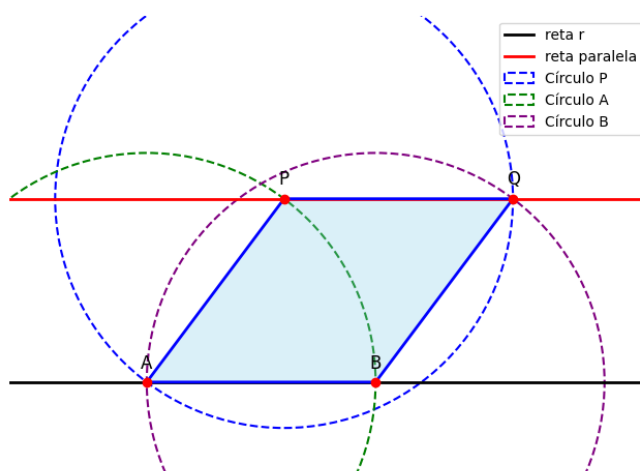
Outro procedimento valioso é a construção de retas paralelas (ver Figura 3). Ela nos ensina a transportar distâncias e estabelecer relações de proporção ligadas ao Teorema de Tales. Podemos executá-la da seguinte forma: (i) Dada uma reta r e um ponto P fora dela, marque um ponto qualquer A sobre a reta r ; (ii) Com a régua, trace a reta ligando A e P ; (iii) Apoie a ponta seca do compasso em A e, com abertura igual à distância AP , desenhe um arco que cruze a reta r em um ponto B ; (iv) Mantendo a mesma abertura do compasso, coloque a ponta seca em P e

desenhe um arco que intercepte a linha AP; (v) Ainda com a mesma abertura, coloque a ponta seca em B e faça um arco que cruze o arco desenhado no passo anterior, encontrando o ponto Q; (vi) Desenhe a linha reta que passa por P e Q. Essa reta PQ será paralela à reta r.

Conceitualmente, cada etapa de construção pode ser lida como operação algébrica. Como discutem Stillwell (2010), Cox (2012) e Lorenzoni e Silva (2016), interseções entre retas e circunferências conduzem a expressões obtidas por soma, subtração, multiplicação, divisão e extração de raiz quadrada, evidenciando a articulação histórica entre geometria e álgebra.

Assim, os chamados números construtíveis são precisamente aqueles que conseguimos obter a partir do conjunto dos racionais usando uma quantidade finita dessas operações fundamentais.

Figura 3 – Construção de paralela



Fonte: elaboração dos autores.

5 NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS EM UMA ABORDAGEM ALGÉBRICA

Para demonstrar as impossibilidades, é necessário converter desenho em álgebra. Associamos pontos construídos a coordenadas reais $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e interpretamos cada nova interseção como operação aritmética ou extração de raiz quadrada. Essa tradução conduz, naturalmente, ao vocabulário de extensões de corpos (Stillwell, 2010).

5.1 Grau de uma extensão algébrica

Para fundamentar nossa análise, o primeiro conceito abstrato que precisamos introduzir é o de corpo. Didaticamente, podemos pensar em um corpo K como um "universo numérico"

autossuficiente, equipado com as operações de adição (+) e multiplicação ($\cdot$), onde podemos realizar livremente somas, subtrações, multiplicações e divisões (exceto por zero) sem nunca sair desse universo. Formalmente, para que um conjunto K seja um corpo, ele deve satisfazer certos requisitos matemáticos: o par $(K, +)$ deve ser um grupo abeliano com elemento neutro 0; o conjunto dos elementos não nulos $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ deve constituir também um grupo abeliano com elemento neutro 1; e a multiplicação deve ser distributiva em relação à adição, ou seja, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ para quaisquer $a, b, c \in K$. Em nosso estudo, os dois corpos mais importantes são o dos números racionais $\mathbb{Q}$ e o dos números reais $\mathbb{R}$.

Uma vez compreendido o conceito de corpo, o passo seguinte consiste em explorar como esses universos numéricos se expandem ou se aninham. É aqui que entra o conceito de extensão de corpo. Dizemos que um corpo L é uma extensão de um corpo K (indicado por L/K ou $K \subseteq L$) se o universo menor K estiver totalmente contido no universo maior L , e as operações em K funcionarem de maneira idêntica às de L . Quando isso ocorre, o corpo maior L pode ser enxergado como um espaço vetorial sobre o corpo base K . A dimensão desse espaço vetorial (ou seja, o número de elementos necessários para gerar L a partir de K) é o que chamamos de grau da extensão, representado por $[L:K]$. Se essa dimensão for um número inteiro finito, dizemos que L é uma extensão finita de K .

Essa relação de expansão nos permite analisar a natureza dos novos números que entram em nosso universo matemático. Um número $\alpha \in L$ é chamado de algébrico sobre K se ele for a solução (raiz) de algum polinômio não nulo $p(x) \in K[x]$, ou seja, se $p(\alpha) = 0$. Se todos os elementos do corpo maior L forem algébricos sobre o corpo base K , dizemos que L é uma extensão algébrica. Caso contrário, se um número não for raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes em K , ele é denominado transcendente. Ao adicionarmos um novo elemento α a um corpo K , formamos o menor corpo que contém ambos, denotado por $K(\alpha)$. O polinômio de menor grau com coeficientes em K e coeficiente líder igual a 1 que admite α como raiz é o chamado polinômio irredutível ou mínimo de α sobre K , e o grau da extensão $[K(\alpha):K]$ corresponderá precisamente ao grau desse polinômio mínimo. Por exemplo, ao incorporarmos $\sqrt{2}$ (que é raiz do polinômio $x^2 - 2$) ao corpo dos racionais, formamos o corpo estendido $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$, cuja extensão tem grau $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}] = 2$.

Para introduzir extensões de corpos na Educação Básica sem perda de rigor, podemos usar a imagem de "universos numéricos". Parte-se de $\mathbb{Q}$; ao exigir a diagonal de um quadrado de lado 1, surge $\sqrt{2}$, que não pertence a $\mathbb{Q}$; é preciso ampliar o universo para $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Essa ampliação tem custo algébrico mensurável pelo grau da extensão. No contexto régua-compasso,

as interseções permitidas remetem a equações de grau 1 ou 2; por isso, a cadeia de construções envolve extensões quadráticas sucessivas.

5.2 Os números construtíveis formam um subcorpo de $\mathbb{R}$

O conjunto de todos os números reais construtíveis com régua e compasso, que representamos pela letra C , possui propriedades estruturais robustas. Teorema: O conjunto C dos números construtíveis forma um subcorpo do corpo dos números reais $\mathbb{R}$ e contém o corpo dos racionais $\mathbb{Q}$. Além disso, se um número positivo α pertence a C , a sua raiz quadrada $\sqrt{\alpha}$ também pertence a C (Cox, 2012; Cassaro, 2023).

Prova: Sejam a e b construtíveis ($a, b \in C$). Com procedimentos clássicos e sem graduação na régua, constroem-se segmentos para $a + b$, $a - b$ (quando $a \geq b$), ab e a/b ($b \neq 0$), usando paralelas e semelhança de triângulos. Além disso, por relações métricas em triângulos retângulos, constrói-se $\sqrt{a}$ a partir de segmentos de comprimentos a e 1 . Assim, C é fechado para as quatro operações e para raiz quadrada de positivos; logo, C é subcorpo de $\mathbb{R}$ que contém $\mathbb{Q}$. Podemos traduzir formalmente a construtibilidade de um número real α em termos de extensões de corpos: o número α é construtível se, e somente se, existir uma cadeia finita de extensões de corpos $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \cdots \subset K_n \subseteq \mathbb{R}$ de modo que α pertença a K_n e, para cada etapa, a extensão K_{i+1}/K_i tenha grau $[K_{i+1}:K_i] = 2$. Usando a regra de multiplicação do grau de extensões sucessivas, temos: $[K_n:\mathbb{Q}] = [K_n:K_{n-1}][K_{n-1}:K_{n-2}] \cdots [K_1:\mathbb{Q}] = 2^n$. Por conta disso, se α é um número construtível, o grau da extensão simples $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ precisa obrigatoriamente ser um divisor de 2^n , ou seja, deve ser uma potência de 2 (Cox, 2012). Aqui vale fazer um alerta importante para a sala de aula: há uma diferença sutil entre uma condição necessária e uma condição necessária e suficiente. O fato de o grau $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ ser uma potência de 2 é apenas uma condição necessária para a construtibilidade. Por exemplo, existem números cujos polinômios mínimos sobre $\mathbb{Q}$ têm grau 4 (que é 2^2), mas cujos valores não podem ser desenhados com régua e compasso. Isso ocorre porque a extensão de grau 4 deles não consegue ser fatiada em duas extensões quadráticas sucessivas de grau 2. A caracterização completa (condição necessária e suficiente) exige que o número pertença ao final de uma torre finita de extensões de grau 2, isto é, $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \cdots \subset K_n \subseteq \mathbb{R}$ com $[K_{i+1}:K_i] = 2$.

6 DEMONSTRAÇÃO DAS IMPOSSIBILIDADES

As demonstrações completas exigem teoria de Galois e teoria de corpos. Ainda assim, os núcleos argumentativos podem ser expostos de modo acessível, preservando a lógica de cada impossibilidade.

Na duplicação do cubo, devemos construir $\alpha = \sqrt[3]{2}$. O polinômio $p(x) = x^3 - 2$ é irreduzível em $\mathbb{Q}[x]$ (Critério de Eisenstein com $p = 2$), portanto é o polinômio mínimo de α sobre $\mathbb{Q}$. Segue que $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}] = 3$. Como 3 não é potência de 2, α não é construtível com régua e compasso; logo, a duplicação do cubo é impossível nesse sistema.

Para a trissecção, basta um contraexemplo. Tomando o ângulo $\theta = \pi/9$ rad, observe que $3\theta = \pi/3$ rad. Utilizando-se a identidade trigonométrica $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ e $\cos(\pi/3) = 1/2$, obtém-se a equação cúbica $8x^3 - 6x - 1 = 0$ na variável $x = \cos \theta$. Após a mudança $z = 2x$, tem-se $z^3 - 3z - 1 = 0$, sem raízes racionais pelo teste usual; daí a irreduzibilidade sobre $\mathbb{Q}$. Conclui-se que o grau de $\mathbb{Q}(\cos(\pi/9))$ sobre $\mathbb{Q}$ é 3, incompatível com a cadeia quadrática exigida pela construtibilidade euclidiana.

Na quadratura do círculo, precisamos de $x = r\sqrt{\pi}$ (com $r = 1$). Se $\sqrt{\pi}$ fosse construtível, então $\pi = (\sqrt{\pi})^2$ também seria. Mas π é transcendente (Lindemann, 1882), portanto não algébrico sobre $\mathbb{Q}$. Isso exclui π do conjunto dos construtíveis e encerra, no quadro euclidiano clássico, a possibilidade de quadrar o círculo.

7 IMPLICAÇÕES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA

No ensino básico, esses três problemas oferecem um eixo didático fértil (Miguel; Miorim, 2004; Sá; Smith, 2024): combinam atividade de construção, leitura histórica e argumentação algébrica, aproximando conhecimentos geométricos de práticas investigativas alinhadas ao ensino de matemática.

Fase 1: O Desafio Prático e a Conjectura (Duração: 2 horas-aula).

Nesta etapa, o professor desafia os estudantes a realizarem a bissecção (divisão ao meio) de um ângulo de 60° usando régua não graduada e compasso, o que eles fazem sem dificuldade seguindo a Proposição 9 do Livro I de *Os Elementos* de Euclides. Em seguida, vem o grande desafio: tentar dividir esse mesmo ângulo de 60° em três partes exatamente iguais (trissecção) usando os mesmos instrumentos. O docente circula pela sala, acompanhando as tentativas e os inevitáveis ajustes por tentativa e erro. A pergunta que move a aula é: 'Se dividir em 2 partes funciona de forma exata para qualquer ângulo, por que não conseguimos achar um método geral e preciso para dividir em 3?'

Fase 2: A Tradução Algébrica e os Limites dos Instrumentos (Duração: 2 horas-aula).

Aqui, o professor apresenta a metáfora dos "Universos Numéricos" (corpos) e ajuda a turma a traduzir as retas e circunferências para equações. Mostra-se que a bissecção de um ângulo ϕ envolve calcular o cosseno de $\phi/2$, dado pela fórmula $\cos(\phi/2) = \sqrt{(1+\cos \phi)/2}$, que exige apenas somas e uma raiz quadrada (nossa extensão simples de custo 2). Por outro lado,

trissecar o ângulo φ exige achar o cosseno de $\varphi/3$, o que nos empurra para a equação cúbica $4y^3 - 3y - \cos \varphi = 0$ (uma extensão de custo 3). No quadro, o professor ilustra como cruzar retas e círculos só nos dá equações de grau 1 ou 2. A pergunta disparadora para reflexão é: "Se as nossas ferramentas só resolvem equações de grau 1 ou 2, que tipo de novas curvas ou instrumentos teríamos de criar para resolver uma equação de grau 3?"

Fase 3: O Significado Epistemológico da Impossibilidade (Duração: 1 hora-aula).

Nessa etapa, a turma discute o estatuto matemático do 'impossível'. O professor contrapõe verificação empírica (aproximação por desenho) e demonstração dedutiva, destacando por que a prova altera o tipo de resposta que a matemática aceita. A questão de fechamento pode ser: 'Quando uma demonstração de impossibilidade amplia, e não reduz, o conhecimento matemático?'.

Dicas para a Mediação e Dificuldades Frequentes.

Ao conduzir essa sequência, é muito comum que os alunos confundam a impossibilidade geral de um método com casos particulares, argumentando que conseguem trissecar um ângulo de 90° (obtendo três partes de 30°). O professor deve mediar mostrando que a prova de Wantzel foca na ausência de uma receita geométrica geral válida para todo e qualquer ângulo, e que a impossibilidade de trissecar os 60° serve como o exemplo que quebra a regra geral. Outro ponto recorrente é a tentativa de usar réguas graduadas (o método de neusis atribuído a Arquimedes). O docente pode aproveitar essa rica oportunidade histórica para discutir os limites axiomáticos estabelecidos por Euclides e debater como a mudança das ferramentas e regras transforma as curvas que conseguimos desenhar (Nobre, 2001; Valente, 2013).

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo apresentou um percurso histórico-algébrico dos três problemas clássicos e discutiu seu valor para o ensino de geometria. O ponto central é que as provas de impossibilidade do século XIX não encerram o tema; elas reorganizam a compreensão dos limites dos instrumentos e explicitam a cooperação entre visualização geométrica e formalização algébrica.

Do ponto de vista pedagógico, a articulação entre História da Matemática e números construtíveis favorece leitura crítica de procedimentos. Ao investigar por que certos desenhos falham, os estudantes passam da execução mecânica para a análise de hipóteses, regras e consequências lógicas.

Em termos finais, os problemas clássicos permanecem atuais como contexto de formação matemática. Eles permitem trabalhar, no mesmo percurso, prática de construção,

linguagem algébrica e cultura histórica da disciplina, com ganhos para a argumentação rigorosa e para a autonomia intelectual dos alunos.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos aos membros do Grupo de Estudos em Ensino de Matemática (GEEMA), do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), pelo apoio, discussões e incentivo durante a realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS

ARAUJO LORENZONI, Claudia A. C. de; SILVA DA SILVA, Circe Mary. O encontro da álgebra e da geometria nas obras de Descartes e Hilbert. **Revista História da Matemática para Professores**, v. 3, n. 1, p. 26–36, 2016. Disponível em: <https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/26>. Acesso em: 24 jun. 2026.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

CASSARO, Alan Gabriel. **A impossibilidade das construções clássicas com régua e compasso, com aplicações no ensino básico**. 2023. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaio Temático: História e Matemática em sala de aula**. Belém: SBEM-PA, 2017.

COX, David A. **Galois Theory**. 2. ed. Hoboken: Wiley, 2012.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FAUVEL, John; VAN MAANEN, Jan (ed.). **History in mathematics education: the ICMI study**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. **Interdisciplinaridade: história, teoria e pesquisa**. Campinas: Papirus, 2008.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

KLINE, Morris. **Mathematical thought from ancient to modern times**. New York: Oxford University Press, 1990. 3 v.

LINDEMANN, Ferdinand von. Über die Zahl π . **Mathematische Annalen**, Leipzig, v. 20, n. 2, p. 213–225, 1882.

MARTINS, Daniel Felipe Neves; VARGAS, Anderson Reis de. Diálogo entre um Problema Grego Clássico e os Números Transcendentes: o caso da quadratura do círculo. **Revista de**

História da Educação Matemática, São Paulo, v. 10, p. 1–15, 2024. DOI: 10.62246/HISTEMAT.2447-6447.2024.10.645.

MENDES, Iran Abreu. **História da matemática no ensino de matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. **História na educação matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

NOBRE, Sérgio Roberto. A história da matemática e sua importância na formação do professor. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Rio Claro, v. 1, n. 1, p. 55–68, 2001.

PERUSSO, Sula Regina Borsato. **A Geometria no Ensino Fundamental II: a aprendizagem a partir de construções com régua e compasso**. 2023. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

PILATI, Greyce Contini. A quadratura do círculo e o volume da esfera. **Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática**, Maringá, v. 6, n. 1, p. 16–22, 2022.

SÁ, Joyce Carvalho de; SMITH, Daniele Esteves Pereira. Conhecimentos geométricos e a BNCC: discussões a partir da Cortina Rasante de Vauban. **Revista História da Matemática para Professores**, v. 10, n. 1, p. 1–10, 2024. Disponível em: <https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/125>. Acesso em: 24 jun. 2026.

STILLWELL, John. **Mathematics and its history**. 3. ed. New York: Springer, 2010.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Oito temas sobre a história da educação matemática. **REMATEC**, Natal, ano 8, n. 12, p. 22–50, 2013.

WAGNER, Eduardo. **Construções geométricas**. Com a colaboração de José Paulo Q. Carneiro. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

WANTZEL, Pierre-Laurent. Recherches sur os meios de reconhecer se um problema de geometria pode ser resolvido com a régua e o compasso. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, Paris, v. 2, p. 366–372, 1837.

Submetido em: 28 de abril de 2026.

Aprovado em: 22 de junho de 2026.