

O MÉTODO CHINÊS NO ENSINO DE SISTEMAS LINEARES

Kleyton Vinicyus Godoy¹
Mateus Luiz de Souza²

RESUMO

Este artigo apresenta uma proposta didática para o ensino de sistemas lineares no Ensino Médio a partir do procedimento *fāngchéng* (方程), presente no capítulo 8 do *Jiuzhang Suanshu* (*Os Nove Capítulos sobre a Arte Matemática*). A proposta busca articular História da Matemática, ensino de álgebra e discussão didática, tomando como ponto de partida um problema relacionado à produção e à mensuração de grãos na matemática chinesa antiga. O texto contextualiza a obra, discute o significado histórico do termo *fāngchéng*, apresenta o uso das varas de contagem como instrumento de cálculo e desenvolve uma adaptação do procedimento para a linguagem escolar contemporânea. A atividade explicita os anacronismos envolvidos nessa transposição, especialmente o uso de incógnitas, números indo-arábicos e registros algébricos atuais. Além disso, propõe uma ficha didática, um passo a passo de resolução e questões de mediação para auxiliar o professor na condução da aula. Com isso, busca-se oferecer uma possibilidade de abordagem que permita aos estudantes comparar diferentes formas de representação, compreender procedimentos de eliminação sucessiva e reconhecer a matemática como produção histórica, cultural e social.

Palavras-chave: Sistemas Lineares. Educação Matemática. História da Matemática. *Fāngchéng*.

INTRODUÇÃO

O ensino de sistemas lineares costuma ser organizado, na escola, a partir de procedimentos já estabilizados, como método da adição, substituição, comparação e escalonamento. De acordo com Godoy e Leite (2021, p. 3), a “resolução de sistemas lineares é um assunto com escassa difusão no cenário nacional quando se é concebido historicamente”. Em muitos materiais didáticos, a História da Matemática surge, quando muito, como comentário lateral ou curiosidade introdutória. Essa forma de inserção histórica pode limitar a possibilidade de discutir a matemática como produção humana, situada em contextos culturais e associada a problemas práticos. Campos e Tavares (2015, p. 319) observam que, em parte dos materiais didáticos, “o contexto histórico é tratado como curiosidade, uma mera ilustração, mas não como metodologia de ensino”.

¹ Professor do Departamento de Educação em Ciências Físicas e Matemática da Universidade Federal de Lavras, Lavras, Minas Gerais. Doutor em Educação Matemática pela Unesp (Rio Claro). E-mail: kleyton.godoy@ufla.br

² Professor da Secretaria de Educação de Estado de Minas Gerais, Nepomuceno, Minas Gerais. Estudante da Graduação em Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Lavras (UFLA). E-mail: mateus.souza5@estudante.ufla.br

A partir de uma pesquisa com professores, Araman e Batista (2017, p. 395) destacam que as potencialidades da História da Matemática no ensino “vão além da abordagem da história como curiosidade ou motivação”. Nessa perspectiva, o recurso histórico não é tomado aqui como ornamentação, mas como meio de organizar problemas, comparar registros de representação e discutir por que certos procedimentos funcionam.

Este artigo tem por objetivo apresentar uma proposta de encaminhamento didático, voltada ao Ensino Médio, para a resolução de sistemas lineares a partir do *fāngchéng*, no contexto do método chinês. A proposta concentra-se na exploração de um dos enunciados do capítulo 8 do *Jiuzhang Suanshu* (Os Nove Capítulos sobre a Arte Matemática), texto clássico da matemática chinesa antiga no qual aparecem estratégias voltadas à resolução de situações práticas.

Para a construção da proposta, tomamos como referência estudos e traduções relacionadas à obra. O enunciado utilizado foi traduzido para o português a partir da versão em língua inglesa apresentada por Schwartz (2008). Para o estudo do procedimento do método chinês, recorremos a Carrera (2009), Tavares e Pereira (2013) e Campos e Tavares (2015). Com isso, busca-se oferecer ao professor um percurso de trabalho que articule contexto histórico, resolução de sistemas lineares e discussão didática. A atividade preserva a lógica operatória do arranjo histórico, ainda que sua forma de registro seja adaptada para fins didáticos.

Do ponto de vista metodológico, a perspectiva de Fried (2014) orienta o modo como a História da Matemática é aqui mobilizada. Para o autor, integrá-la ao ensino não significa apenas ilustrar conteúdos com episódios do passado, mas reconhecer que os procedimentos históricos carregam uma alteridade: modos de representar e resolver problemas que diferem dos atuais e que, justamente por isso, podem provocar estranhamento produtivo nos estudantes. A atividade aqui desenvolvida assume os anacronismos que a transposição didática exige, mas não os apaga. Ao contrário, torna-os objeto explícito de reflexão, de modo que o estudante perceba a distância entre o procedimento histórico e a escrita algébrica que conhece.

BREVE CONTEXTO DE OS NOVE CAPÍTULOS SOBRE A ARTE MATEMÁTICA

Os Nove Capítulos sobre a Arte Matemática figura entre as obras mais conhecidas da tradição matemática chinesa antiga e é frequentemente apresentada como o texto matemático mais influente da história da China. Segundo Schwartz (2008), trata-se da mais antiga e mais influente dentre as obras que compõem os chamados *Ten Mathematical Classics*, tendo circulado por séculos também em outras regiões do Leste Asiático, como Coreia e Japão. Shen,

Crossley e Lun (1999) relatam que embora a autoria e a datação exata da obra permaneçam incertas, indícios internos do texto sugerem que sua redação tenha ocorrido pouco depois de 200 a.C. Posteriormente, no século III d.C., Liu Hui elaborou um comentário no qual procurou justificar e explicar os procedimentos ali registrados.

Diferentemente de obras organizadas a partir de definições, axiomas e demonstrações formais, Os Nove Capítulos sobre a Arte Matemática apresenta problemas, regras e algoritmos voltados à resolução de situações cotidianas. Paques e Roveran (2017) observam que a obra se caracteriza como um manual de resolução de problemas, composto por 246 exemplos acompanhados de suas soluções, nos quais, após a apresentação de alguns casos particulares, o método geral era sintetizado.

Esse caráter prático também se manifesta na própria organização temática da obra. Schwartz (2008) descreve que os nove capítulos tratam de assuntos como medição de terras, razões e proporções, distribuição proporcional, cálculo de dimensões, construção, tributação, excesso e falta, resolução de equações lineares e problemas geométricos associados a triângulos retângulos. Tal panorama mostra que a obra não se restringe a um único ramo da matemática, mas reúne procedimentos relacionados a diferentes necessidades sociais, administrativas, comerciais e agrárias. Entre esses capítulos, o oitavo apresenta procedimentos para resolver equações lineares por meio de arranjos numéricos que, em leitura contemporânea, podem ser aproximados à ideia de matrizes. Segundo Chen (2001)³, é nesse capítulo que se encontra o procedimento *fāngchéng* em seu sentido original: o arranjo lado a lado das quantidades em colunas sobre uma superfície de cálculo, operando com varas de contagem (*chóusuàn*, 籌算).

As varas de contagem eram pequenos bastões de bambu ou osso dispostos sobre um tabuleiro quadriculado em que cada coluna representava uma equação do sistema, com os coeficientes posicionados verticalmente. As operações de multiplicação e subtração eram realizadas manipulando fisicamente as varas, reorganizando o arranjo até obter uma configuração triangular que permitia determinar as incógnitas sucessivamente. Esse instrumento de cálculo, combinado com o arranjo tabular *fāngchéng*, constituía uma ferramenta de resolução de problemas práticos, muito antes que a álgebra simbólica fosse sistematizada no Ocidente (Hart, 2001; Schwartz, 2008).

³ Para a leitura exploratória dos trechos em chinês presentes em Chen (2001), utilizou-se o ChatGPT como ferramenta auxiliar de tradução. Como os autores não possuem domínio da língua chinesa, essa leitura foi mobilizada apenas de modo complementar, não substituindo as traduções e demais estudos utilizados como referência principal para a compreensão do *Jiuzhang Suanshu* e do procedimento *fāngchéng*.

A ETIMOLOGIA DO FĀNGCHÉNG (方程)

Shen, Crossley e Lun (1999), ao apresentarem uma tradução completa de Os Nove Capítulos sobre a Arte Matemática para a língua inglesa, acompanhada dos comentários de Liu Hui, traduzem *fāngchéng* como *rectangular arrays*, isto é, “arranjos retangulares”, ressaltando que o arranjo das varas de contagem em colunas sobre o tabuleiro era simultaneamente o suporte material do cálculo e o próprio significado do procedimento: a disposição física das varas era o método.

A etimologia dos dois caracteres pode revelar camadas de significado importantes para a sala de aula. O caractere *fāng* (方), que significa "retângulo" ou "quadrado", é relativamente direto. O termo *chéng* (程) admite diferentes leituras. Hart (2011, p. 68-69) apresenta três definições históricas do termo:

1ª definição - Liu Hui (263 d.C.): define *chéng* como "medida", associando-o ao termo *kèchéng*, usado para a coleta de impostos, e propõe que *fāngchéng* significa "retângulo de medidas", isto é, cada coluna do arranjo expressa um conjunto de quantidades dispostas lado a lado em proporção com o número de objetos.

2ª definição - Li Ji (século XI): reafirma o sentido de "termos de uma razão" colocados lado a lado, definindo *fāngchéng* como a disposição de razões à esquerda e à direita que, combinadas, reúnem numerosos objetos.

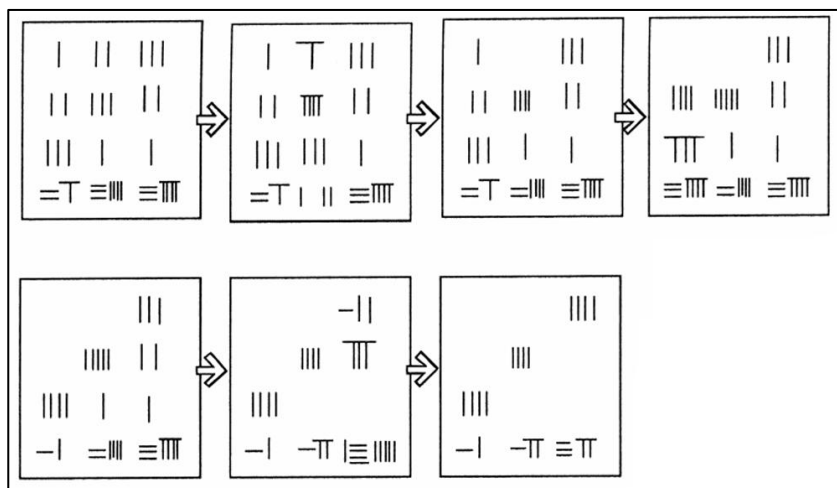
3ª definição - Yang Hui (1261): oferece a definição que mais circula na literatura secundária: “o que se chama “retangular” (*fāng*) é a forma dos números; “medida” (*chéng*) é o termo geral para [todas as formas de] medição, também um método para igualar pesos, comprimentos e volumes, referindo-se especialmente a medir clara e distintamente o maior e o menor” (Hart, 2011, p. 69, tradução nossa⁴).

Hart (2011) conclui que nenhuma dessas definições oferece uma resposta definitiva sobre o significado original do termo quando os Nove Capítulos foram compilados, razão pela qual ele opta por deixar *fāngchéng* sem tradução. A partir dessas leituras interpretamos que o nome descreve o próprio procedimento: dispor as quantidades em colunas paralelas e operar sobre elas até encontrar os valores desconhecidos.

⁴ What is called “rectangular” (*fāng*) is the shape of the numbers; “measure” (*chéng*) is the general term for [all forms of] measurement, also a method for equating weights, lengths, and volumes, especially refer ring to measuring clearly and distinctly the greater and lesser.

A Figura 1 ilustra como esse tipo de problema podia ser resolvido em um tabuleiro de contagem chinês tradicional pelo *fāngchéng*:

Figura 1 – Resolução⁵ do problema 1 do Capítulo 8 pelo procedimento *fāngchéng*



Fonte: Chen (2001, p. 5)

Os sete quadros representam os passos sucessivos do método. No quadro inicial, as três equações do problema estão dispostas em colunas, em que cada coluna corresponde a uma equação, e os coeficientes das três qualidades de arroz aparecem empilhados verticalmente, com o resultado de cada equação na linha inferior. Essa é a forma do *fāngchéng*: não uma escrita horizontal de equações, mas um arranjo físico de varas posicionadas sobre o tabuleiro, em que a estrutura espacial já carrega a lógica do problema. Nos quadros seguintes, o procedimento avança por meio de operações de multiplicação e subtração entre colunas: em cada etapa, uma coluna é manipulada a partir de outra, eliminando progressivamente os coeficientes superiores até que o arranjo assumira uma forma triangular (visível nos quadros finais), em que apenas uma coluna permanece com três valores não nulos. É exatamente dessa configuração triangular que se extraem as incógnitas, resolvendo o sistema de baixo para cima.

É possível ver que os problemas não eram solucionados com a simbologia algébrica atual. Assim, o uso de números indo-arábicos, de incógnitas e da escrita escolar constitui um anacronismo assumido neste texto, empregado para tornar o procedimento mais acessível ao professor da Educação Básica.

⁵ A resolução representada nessa imagem corresponde ao mesmo problema que será abordado neste artigo, porém em uma versão adaptada para fins didáticos.

PROPOSTA PARA A SALA DE AULA

A atividade apresentada a seguir foi pensada para turmas do Ensino Médio, especialmente quando os sistemas lineares são estudados em articulação com diferentes estratégias de resolução. A situação selecionada corresponde ao primeiro enunciado do capítulo 8, *Rectangular Grids* (Arranjos Retangulares), de Os Nove Capítulos sobre a Arte Matemática. Por meio desse problema, o professor pode relacionar a resolução de sistemas lineares como uma prática historicamente situada, mostrando que procedimentos desse tipo foram mobilizados em situações ligadas à vida agrícola e administrativa. No caso do enunciado em questão, conhecer o rendimento de diferentes tipos de arroz em casca poderia auxiliar práticas como controle da produção, armazenamento, distribuição ou tributação, sem atribuir a esse caso a única origem possível do tema.

Tendo em vista essa possibilidade de abordagem, o Quadro 1 apresenta uma síntese da atividade proposta, indicando público-alvo, objetivos, tempo estimado, materiais e etapas de desenvolvimento. A intenção é oferecer ao professor uma visão geral do encaminhamento didático antes da apresentação do procedimento de resolução.

Quadro 1 – Ficha didática da atividade: O método chinês no ensino de sistemas lineares

Público-alvo	Estudantes do Ensino Médio, preferencialmente após a apresentação inicial dos sistemas lineares e métodos de resolução.
Objetivos	Explorar o procedimento <i>fāngchéng</i> e discutir a etimologia do termo e seu significado histórico; Comparar diferentes formas de registro e organização de procedimentos; Discutir a História da Matemática como elemento de problematização conceitual; Reconhecer a matemática como construção histórica e cultural.
Tempo estimado	2 aulas de 50 minutos
Materiais	Cópia do enunciado do problema (ou projeção); Quadro/lousa para sistematização coletiva;
Etapas da atividade	<i>1. Apresentação contextual:</i> breve introdução à obra Os Nove Capítulos e ao contexto histórico do problema. <i>2. Leitura e tradução do enunciado:</i> identificação das incógnitas e das relações entre as quantidades. <i>3. Construção do arranjo tabular:</i> organização dos coeficientes em colunas, conforme o procedimento histórico adaptado. <i>4. Resolução passo a passo:</i> operações de eliminação sucessiva até obtenção do sistema triangular, seguida da substituição regressiva.

	5. <i>Discussão e sistematização:</i> comparação com métodos contemporâneos, reflexão sobre anacronismos e debate sobre a matemática como construção histórica (ver sugestões de mediação adiante).
--	---

Fonte: Elaborado pelos autores.

O procedimento *fāngchéng* adaptado: resolução passo a passo

O enunciado envolve a colheita de três diferentes qualidades de arroz:

Considerem-se 3 feixes de arroz em casca de qualidade superior, 2 feixes de arroz em casca de qualidade média e 1 feixe de arroz em casca de qualidade inferior. O rendimento é de 39 dou⁶ de grão. 2 feixes de arroz em casca de qualidade superior, 3 feixes de qualidade média e 1 feixe de qualidade inferior rendem 34 dou. 1 feixe de qualidade superior, 2 feixes de qualidade média e 3 feixes de qualidade inferior rendem 26 dou. Pergunta-se: quantos dou⁷ rende um feixe de cada qualidade? (Schwartz, 2008, p. 11, tradução nossa⁸).

Fazendo as adaptações que o uso pedagógico da história exige (Fried, 2014), o sistema de equações em questão pode ser representado, em linguagem escolar, pela forma usual de um sistema linear 3x3, em que x representa o rendimento de um feixe de qualidade superior (boa qualidade), y o rendimento de um feixe de qualidade média (qualidade regular) e z o rendimento de um feixe de qualidade inferior (má qualidade).

Quadro 2 – Correspondência entre problema verbal, representação algébrica e representação original

⁶ Embora algumas reformulações didáticas modernas apresentem o problema como se envolvesse “preço” ou “venda”, o termo *dou* (斗) refere-se, no contexto histórico de Os Nove Capítulos sobre a Arte Matemática, a uma unidade de capacidade utilizada na medição de grãos. Desse modo, traduções mais próximas da fonte tendem a formular o enunciado em termos de rendimento de grãos em dou, o que recomenda cautela diante de leituras estritamente monetárias do problema.

⁷ Conforme Paques e Roveran (2017), na obra, aparecem três unidades de capacidade: hu, dou e sheng. Essas unidades estão organizadas em base decimal, isto é, 10 sheng correspondem a 1 dou, e 10 dou correspondem a 1 hu. Assim, 1 hu equivale a 100 sheng. Para tornar essa informação mais acessível aos estudantes, o professor pode informar, apenas como aproximação didática, que 1 sheng corresponde a cerca de 200 mL. Logo, Se 10 sheng = 1 dou e 1 sheng ≈ 200 mL, então: 1 dou ≈ 10 × 200 mL = 2000 mL, ou seja, 1 dou ≈ 2 litros.

⁸ Now given 3 bundles of top grade paddy, 2 bundles of medium grade paddy, [and] 1 bundle of low grade paddy. Yield: 39 dou of grain. 2 bundles of top grade paddy, 3 bundles of medium grade paddy, [and] 1 bundle of low grade paddy, yield 34 dou. 1 bundle of top grade paddy, 2 bundles of medium grade paddy, [and] 3 bundles of low grade paddy, yield 26 dou. Tell: how much [dou] does one bundle of each grade yield?

Problema verbal	Representação algébrica	Representação original
Considerem-se 3 feixes de arroz em casca de qualidade superior, 2 feixes de arroz em casca de qualidade média e 1 feixe de arroz em casca de qualidade inferior. O rendimento é de 39 dou de grão.	$3x + 2y + z = 39$	 ≡≡≡
2 feixes de arroz em casca de qualidade superior, 3 feixes de qualidade média e 1 feixe de qualidade inferior rendem 34 dou.	$2x + 3y + z = 34$	 ≡≡≡
1 feixe de qualidade superior, 2 feixes de qualidade média e 3 feixes de qualidade inferior rendem 26 dou.	$x + 2y + 3z = 26$	 =≡

Fonte: Elaborado pelos autores.

No método chinês, os coeficientes e resultados eram organizados em um arranjo tabular semelhante, em leitura contemporânea, a uma matriz, porém sem parênteses ou colchetes. Ao trabalhar com esse arranjo, é importante chamar a atenção da turma para o fato de que, no procedimento histórico, as equações eram organizadas em colunas, e não em linhas, o que altera a leitura usual feita pelos estudantes. Esse aspecto pode ser explorado pelo professor para discutir como diferentes culturas produziram modos próprios de registrar e operar com quantidades. Tem-se então, os coeficientes das equações na vertical, e dispostas, no caso, da primeira equação (1ª) para a terceira equação (3ª):

Quadro 3 – Correspondência entre sistema algébrico atual e arranjo tabular adaptado

Representação algébrica	Arranjo tabular original	Arranjo tabular adaptado

$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$		$\begin{matrix} (3^a) & (2^a) & (1^a) \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array} \right) \end{matrix}$
--	--	--

Fonte: Elaborado pelos autores.

Essa escrita, contudo, deve ser apresentada aos estudantes como uma adaptação didática do problema histórico. Retornando ao problema, temos:

$$\begin{matrix} (3^a) & (2^a) & (1^a) \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Organizado o arranjo, o professor pode conduzir a resolução passo a passo, explicitando aos estudantes tanto a lógica do procedimento quanto as aproximações possíveis com formas atuais de resolução de sistemas lineares. Eis os passos:

1º Passo: Multiplicar todos os termos da equação do meio (2ª equação) pelo primeiro coeficiente da equação da direita (1ª equação).

$$\begin{matrix} (3^a) & (2^a) & (1^a) \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{array} \right) \end{matrix}$$

O intuito, nesse primeiro momento, é eliminar os coeficientes de x da segunda e da terceira equações, de modo que o arranjo comece a assumir uma forma triangular. Nesse sentido, o elemento inicial da primeira coluna pode ser interpretado, como um pivô, pois orienta as operações destinadas a zerar os demais termos dessa coluna.

2º Passo: Subtraímos os termos da coluna do meio (2ª equação) dos seus respectivos termos da coluna da direita (1ª equação) da seguinte forma: $(6 - 3 = 3; 9 - 2 = 7; 3 - 1 = 2; 102 - 39 = 63)$. Portanto, a coluna do meio ficará assim:

$$\begin{matrix} (3^a) & (2^a) & (1^a) \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{array} \right) \end{matrix}$$

3º Passo: Repetimos o processo do 2º passo até que o primeiro termo da coluna do meio (2ª equação) seja eliminado, ou seja, seja zero: ($3 - 3 = 0$; $7 - 2 = 5$; $2 - 1 = 1$; $63 - 39 = 24$). Pronto, eliminamos o primeiro termo da coluna do meio.

$$\begin{array}{c} (3^a) \quad (2^a) \quad (1^a) \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{array} \right) \end{array}$$

Mas não acaba aqui. Agora, repetimos esses passos entre a 3ª e a 1ª equação. O primeiro passo é multiplicar a 3ª equação pelo primeiro coeficiente da 1ª equação.

$$\begin{array}{c} (3^a) \quad (2^a) \quad (1^a) \\ \left(\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \\ 78 & 24 & 39 \end{array} \right) \end{array}$$

Agora subtraímos todos os termos da 3ª equação dos respectivos termos da 1ª equação, repetindo o processo até que o primeiro termo da 3ª equação seja eliminado: ($3 - 3 = 0$; $6 - 2 = 4$; $9 - 1 = 8$; $78 - 39 = 39$).

$$\begin{array}{c} (3^a) \quad (2^a) \quad (1^a) \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array} \right) \end{array}$$

Eliminamos, nesse passo, os coeficientes de x da segunda e da terceira equações, isto é, zeramos os primeiros termos da 2ª e da 3ª coluna. Na etapa seguinte, a mesma lógica é retomada para tornar zero o coeficiente de y da terceira equação, com isso, passamos a operar a 3ª coluna com a 2ª. Assim, de modo semelhante ao escalonamento estudado atualmente, o método chinês recorre a eliminações sucessivas para tornar o sistema mais simples de resolver, seguindo a mesma lógica dos passos anteriores:

1º Passo: Agora multiplicamos todos os termos da 3ª equação pelo segundo coeficiente da 2ª equação.

$$\begin{array}{ccc}
 (3^a) & (2^a) & (1^a) \\
 0 & 0 & 3 \\
 20 & 5 & 2 \\
 40 & 1 & 1 \\
 195 & 24 & 39
 \end{array}$$

2º Passo: Agora subtraímos os termos da 3ª equação dos respectivos termos da 2ª equação.

3º Passo: Repetimos o passo anterior até que o segundo termo da 3ª equação seja eliminado, ou seja, igual a zero.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} (3^a) & (2^a) & (1^a) \\ 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \\ 195 & 24 & 39 \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} (3^a) & (2^a) & (1^a) \\ 0 & 0 & 3 \\ 15 & 5 & 2 \\ 39 & 1 & 1 \\ 171 & 24 & 39 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (3^a) & (2^a) & (1^a) \\ 0 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & 2 \\ 38 & 1 & 1 \\ 147 & 24 & 39 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (3^a) & (2^a) & (1^a) \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 2 \\ 37 & 1 & 1 \\ 123 & 24 & 39 \end{pmatrix} \\
 & & \rightarrow \begin{pmatrix} (3^a) & (2^a) & (1^a) \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Agora sim, eliminamos o segundo termo da 3ª equação, finalizando o sistema por meio do método chinês⁹. O professor pode aproveitar esse momento para mostrar que se obteve um sistema linear equivalente ao original, cuja forma permite resolver as incógnitas de maneira sucessiva, tal como ocorre em procedimentos contemporâneos de triangularização:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 5y + z = 24 \\ 36z = 99 \end{cases}$$

Agora podemos resolver o sistema, como no método de escalonamento, de baixo para cima, pois a última equação tem apenas uma incógnita. A partir dela, resolvemos todo o sistema. O "z" representa os feixes de má qualidade (qualidade inferior). Para encontrar a quantidade de feixes de má qualidade, basta isolar a incógnita z na equação: dividimos 99 por 36, resultando em:

⁹ Podemos observar que em síntese, o método chinês se organiza em dois movimentos básicos: primeiramente, ajustam-se os valores de duas colunas para que os coeficientes envolvidos se tornem comparáveis. Em seguida, subtraem-se os elementos correspondentes, com o objetivo de eliminar um dos termos. Os demais passos consistem na repetição dessa mesma estratégia nas colunas seguintes.

$$36z = 99$$

$$z = 2,75 \text{ dou de grão}$$

Portanto, o rendimento de um feixe de qualidade inferior é de 2,75 dou de grão de arroz. Com essa informação, podemos determinar o rendimento correspondente ao feixe de qualidade média:

$$5y + z = 24$$

$$5y + 2,75 = 24$$

$$y = 4,25 \text{ dou de grão}$$

Encontramos, assim, o rendimento de um feixe de qualidade média, que é 4,25 dou de grão de arroz. Em seguida, substituímos esse valor na equação restante para determinar o rendimento do feixe de qualidade superior:

$$3x + 2y + z = 39$$

$$3x + 2 \cdot (4,25) + 2,75 = 39$$

$$x = 9,25 \text{ dou de grão}$$

Finalmente, obtemos o rendimento de um feixe de qualidade superior: 9,25 dou de grão de arroz. Encontramos, portanto, os rendimentos correspondentes às três qualidades de feixes. Mais do que propor um sistema de equações em sentido contextualizado, o enunciado organiza matematicamente uma situação de comparação entre diferentes rendimentos agrícolas. Assim, após a resolução, é importante destacar que o problema preserva a lógica de comparação entre três qualidades de colheita de grão de arroz: superior (boa qualidade), média (qualidade regular) e inferior (má qualidade), o que mostra seu vínculo com situações de utilidade prática.

Outros encaminhamentos

Para além da resolução, o professor pode promover uma discussão com a turma a partir das perguntas de mediação apresentadas a seguir. Esse momento pode ser conduzido ao longo da atividade ou concentrado na etapa de sistematização final, conforme o andamento da aula e os interesses dos estudantes:

a) O que é diferente entre a forma como esse problema era registrado na China antiga e a forma como escrevemos sistemas lineares hoje? O que isso sugere sobre a relação entre linguagem e matemática?

b) Por que organizar as equações em colunas, e não em linhas? Que vantagem ou lógica você percebe nessa escolha?

c) O método chinês e o escalonamento chegam ao mesmo resultado. Isso significa que são o mesmo método? O que eles têm em comum e o que os diferencia?

d) Por que usamos letras como x , y e z nesta proposta, se os matemáticos chineses não as usavam?¹⁰

e) Que outros problemas do seu livro didático poderiam ser resolvidos pelo procedimento *fāngchéng*? O método funcionaria da mesma forma?

Vale destacar, por fim, que o procedimento *fāngchéng* não se restringe ao problema histórico aqui apresentado, podendo ser aplicado aos sistemas lineares com os exercícios dos próprios livros didáticos utilizados pelo professor. Essa possibilidade de transitar entre o contexto histórico e o cotidiano escolar é, em si, um recurso didático: o estudante pode perceber que o mesmo procedimento atravessa épocas e contextos distintos, o que pode contribuir para uma compreensão de que os procedimentos matemáticos têm história, e que essa história tem algo a dizer sobre o que aprendemos hoje.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo apresentou possibilidades de trabalho com sistemas lineares a partir do procedimento *fāngchéng* presente nos Nove Capítulos sobre a Arte Matemática, com ênfase em sua realização em sala de aula no Ensino Médio. Ao assumir, de modo explícito, os anacronismos envolvidos na passagem do arranjo histórico com varas de contagem para a escrita algébrica escolar, o texto procurou oferecer ao professor um encaminhamento didático viável, sem apagar a historicidade do procedimento. Nessa perspectiva, a atividade pode contribuir para que os estudantes relacionem diferentes formas de representação, comparem procedimentos de resolução e reconheçam que os conhecimentos matemáticos foram produzidos em contextos específicos.

¹⁰ A notação algébrica com letras para representar incógnitas não existia no contexto dos Nove Capítulos. Sua sistematização ocorreu muitos séculos depois, sobretudo a partir do trabalho de François Viète (1540–1603) no final do século XVI, e foi progressivamente consolidada ao longo do século XVII. A origem e o desenvolvimento dessa notação constituem, por si só, um tema profícuo para exploração e pesquisa em sala de aula, podendo ser trabalhado como atividade complementar ou como ponto de partida para uma investigação histórica conduzida pelos próprios estudantes.

Para o professor, trata-se de uma possibilidade de articular História da Matemática e ensino de sistemas lineares para além de um uso ilustrativo, tomando o recurso histórico como elemento de problematização conceitual e metodológica. A proposta também permite discutir com os estudantes uma das utilidades historicamente associadas a procedimentos que hoje reconhecemos no estudo dos sistemas lineares: nesse caso, a organização e mensuração de diferentes qualidades de grãos na China antiga. Desse modo, o trabalho com esse problema pode favorecer não apenas a compreensão de aspectos operatórios do conteúdo, inclusive em aproximação com o escalonamento, mas também a reflexão sobre a matemática como construção histórica e cultural, produzida em diferentes tempos e contextos em diálogo com necessidades práticas, sociais e culturais da humanidade.

REFERÊNCIAS

- ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira; BATISTA, Irinéa de Lourdes. O processo de construção de abordagens históricas na formação interdisciplinar do professor de matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 380-407, abr. 2017. DOI: 10.1590/1980-4415v31n57a19.
- CAMPOS, Viviane Simioli Medeiros; TAVARES, Agamenon Henrique de Carvalho. Uma proposta para o ensino de sistemas lineares sem a teoria de matrizes, via problemas históricos. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 37, ed. especial PROFMAT, p. 318-330, 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/view/14651>. Acesso em: 6 jun. 2026.
- CARRERA, Josep Pla i. **Liu Hui: Nueve capítulos de la matemática china**. Madrid: Nivola Libros y Ediciones, 2009.
- CHEN, Qiwen [陳啟文]. 數學課堂上的另類話題 [Temas alternativos na sala de aula de matemática]. **HPM 通訊**, Taiwan, v. 4, n. 2-3, p. 2-7, 2001. Disponível em: [https://hpmociety.tw/wp-content/uploads/hpmletters/hpm4\(2-3\).pdf](https://hpmociety.tw/wp-content/uploads/hpmletters/hpm4(2-3).pdf). Acesso em: 6 jun. 2026.
- FRIED, Michael N. History of mathematics in mathematics education. In: MATTHEWS, Michael R. (ed.). **International handbook of research in history, philosophy and science teaching**. Dordrecht; Heidelberg; New York; London: Springer, 2014. p. 669-703.
- GODOY, Kleyton Vinicyus; LEITE, Douglas Gonçalves. Regra de Cramer: uma perspectiva histórica para o ensino de sistemas lineares. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa)**, v. 12, n. 5, p. 1-24, 2021. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/rencima/article/view/2996>. Acesso em: 6 jun. 2026.
- HART, Roger. **The Chinese roots of linear algebra**. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2011.
- PAQUES, Otilia T. Wiermann; ROVERAN, Adilson Pedro. **Uma visão geral de problemas muito interessantes do livro Os nove capítulos da arte matemática, de Liu Hui, do século II d.C.** Campinas: IMECC/UNICAMP, 2017. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/sites/default/files/inline/1137/uma_visao_geral_de_problemas

[muito interessantes do livro os nove capitulos da arte matematica 0.pdf](#). Acesso em: 6 jun. 2026.

SCHWARTZ, Randy. A classic from China: The Nine Chapters. **The Right Angle**, [s. l.], v. 16, n. 2, p. 8-12, out. 2008.

SHEN, Kangshen; CROSSLEY, John N.; LUN, Anthony W.-C. **The nine chapters on the mathematical art**: companion and commentary. Oxford: Oxford University Press; Beijing: Science Press, 1999.

TAVARES, Agamenon Henrique de Carvalho; PEREIRA, André Gustavo Campos. História da matemática no ensino de sistemas lineares, matrizes e determinantes. In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2013, Montevideo. **Anais** [...]. Montevideo: [s. n.], 2013. p. 6201-6212.

Submetido em: 22 de fevereiro de 2026.

Aprovado em: 15 de junho de 2026.