RHMP
REVISTA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

ISSN: 2317-9546 ***e*-ISSN**: 2675-715X

NÚMEROS FIGURADOS GREGOS: O CASO DOS TRIANGULARES QUADRADOS E SUA RECORRENCIA

Francisco Regis Vieira Alves[1]

RESUMO

Os antigos gregos possuem uma ampla tradição na formulação das primeiras ideias matemáticas em torno dos números figurais. Nesses termos, registramos trabalhos que introduziram propriedades e identidades matemáticas inesperadas envolvendo números figurais. Por outro lado, passados alguns séculos, um processo evolutivo e irrefreável da Matemática pode ser observado, na medida em que surge o interesse pelo comportamento de certa classe de números com um comportamento híbrido. Diante desse cenário, o presente trabalho, desenvolvido a partir de levantamento bibliográfico, aborda algumas propriedades sobre os números triangulares-quadrados que, de modo natural, surgem a partir dos números triangulares e dos números quadrados. Assim, ao indicar determinadas propriedades importantes, coloca em evidência a formulação de sua recorrência por certos autores, fato que, de modo particular, transmite ao professor de Matemática, um caráter evolutivo dos conceitos e dos objetos, a partir de um viés histórico.
Palavras-chave: História da Matemática. Números figurados. Números triangulares-quadrados. Equação de Pell.

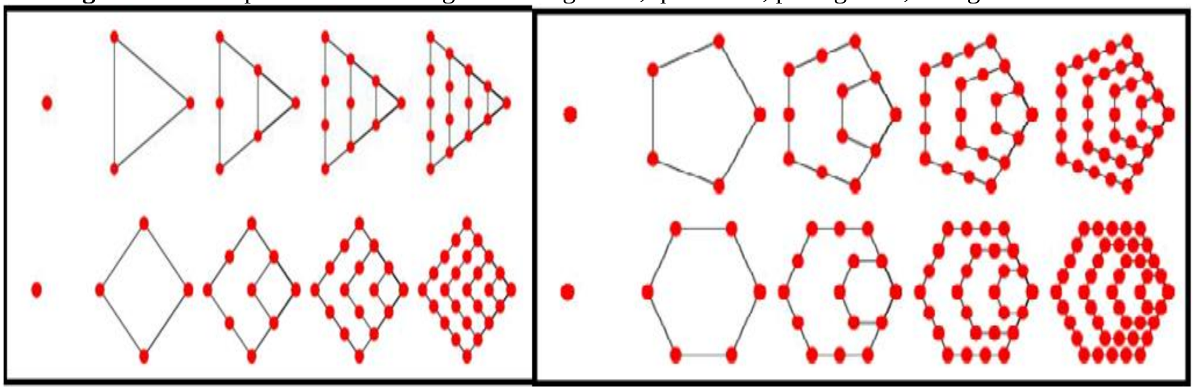
INTRODUÇÃO

Os números figurados adquiriram grande avanço a partir do trabalho de inúmeros antigos gregos. (Deza & Deza, 2012). Com efeito, *Theon* de Smyrna forneceu propriedade envolvendo os números triangulares e quadrados. Nichomacus de Alexandria obteve, no século I d. C que “a soma de um número figural é igual da soma dos antecessores, considerando uma base triangular”. (Deza & Deza, 2012, p. 20). Outro grego, Plutarco, contemporâneo de Nichomachus, e Diophantus generalizou o teorema que envolve a propriedade e/ou teorema conhecida por fórmula de Diophantus ou Plutarco. Na antiga aritmética dos números figurados gregos, antigos matemáticos determinaram propriedades aritméticas envolvendo a soma de números triangulares de ordem antecessora e números em outros planos. Dickson (1971) recorda que nos dois livros dos números poligonais de Diophantus, importante propriedade envolvendo os números triangulares permite relacionar e generalizar com um correspondente número generalizado figurado k-gonal, ou seja, todo número k-gonal, segundo a fórmula de Bachet de Méziriac, pode ser descrito como a soma de números triagulares, considerando o mesmo plano de referência.

[1] Professor Titular departamento de Matemática e Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - Campus Fortaleza. Bolsista de Produtividade em Pesquisa do - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq. (2020 – 2026).

Na Figura 1 visualizamos alguns exemplos de classes de números figurais planares (k-gonais): triangulares, quadrados, pentagonais, hexagonais, etc. No livro dos números poligonais de *Diophantus*, por exemplo, registramos propriedades que relacionam os números k-gonais como combinação e soma de números triangulares (Christianidis & Oaks, 2023; Dickson, 1971; Deza & Deza, 2012; Heath, 1910). Pitágoras, por exemplo, creditava a origem dos números indicados na Figura 1 a partir de uma unidade básica denominada *gnomon*. (Ribenboim, 2000)

Figura 1 – Exemplos de números figurais triangulares, quadrados, pentagonais, hexagonais e outros.



Fonte: Deza & Deza (2012, p. 2)

Mais recentemente, constatamos alguns trabalhos que buscam tanto generalizar propriedades, bem como, determinar a existência de outras classes de números figurais (Asiru, 2016; Caglayan, 2019; Deza & Deza, 2012; Lafer, 1971; Robold, 1989). Para exemplificar, na medida em que fixamos o caso preliminar dos triangulares, na Tabela 1, ao lado esquerdo, listamos alguns casos e sua equação de Pell [2] correspondente a alguns casos de números de comportamento híbrido considerando, ao menos, seu comportamento como número triangular.

Tabela 1 - Números figurais com propriedades correlacionadas com os números triangulares.

NÚMERO FIGURAL	Descrição do conjunto – notação	Equação de Pell
Triangulares-quadrangulares	$\{S_3(n)\}_{n\in IN} \cap \{S_4(n)\}_{n\in IN} = \{S_{3,4}(n)\}_{n\in IN}$	$x^2 - 2y^2 = 1$
Triangulares-pentagonais	$\{S_3(n)\}_{n\in IN} \cap \{S_5(n)\}_{n\in IN} = \{S_{3,5}(n)\}_{n\in IN}$	$x^2 - 3y^2 = -2$
Triangular-heptagonais	$\{S_3(n)\}_{n\in IN} \cap \{S_7(n)\}_{n\in IN} = \{S_{3,7}(n)\}_{n\in IN}$	$x^2 - 5y^2 = 4$
Trangular-octagonais	$\{S_3(n)\}_{n\in IN} \cap \{S_8(n)\}_{n\in IN} = \{S_{3,8}(n)\}_{n\in IN}$	$2x^2 - 3y^2 = 5$
Triangular-nonagonais	$\{S_3(n)\}_{n\in IN} \cap \{S_9(n)\}_{n\in IN} = \{S_{3,9}(n)\}_{n\in IN}$	$x^2 - 7y^2 = 18$

[2] Os detalhes e a argumentação matemática envolvida ultrapassam os limites e a natureza do trabalho. Sugerimos ao leitor consultar o método empregado por vários autores que costuma determinar uma equação de Pell, da forma $x^2 - Dy^2 = 1$, relacionada ao problema da existência de números que possuem duplo comportamento.

Triangulares-oblongos	$\{S_3(n)\}_{n\in IN} \cap \{S_O(n)\}_{n\in IN} = \{S_{3,O}(n)\}_{n\in IN}$	$x^2 - 2y^2 = -1$

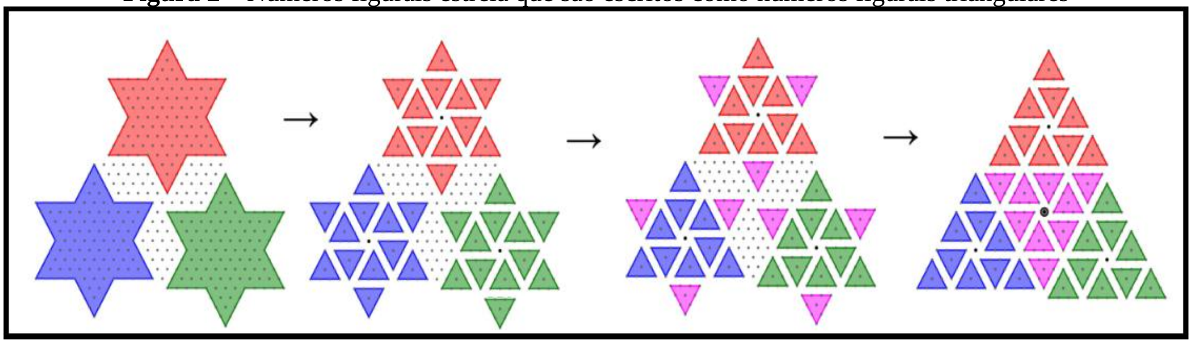
Fonte: Elaborado pelo autor.

Não obstante, apesar de não se constituir como um objeto de interesse específico no presente trabalho podemos recordar vários exemplos de outras classes de números figurados, tais como: números figurados quadrados-pentagonais, números figurados triangulares-quadrados-pentagonais, números figurados quadrados-hexagonais, números figurados pentagonais-hexagonais, números figurados quadrados-heptagonais, números figurados pentagonais-heptagonais, números figurados heptagonais-hexagonais, números figurados octagonais-pentagonais, etc. etc.

De modo *standard*, sabemos que os números triangulares podem ser representados a partir da seguinte lista: $\{S_3(n)\}_{n\in IN}^{p=3} = \left\{0,\ \underline{1},\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ \underline{36},\ 45,\ 55,\ldots,\frac{n(n+1)}{2}\right\}$. Os números quadrados são descritos por $\{S_4(n)\}_{n\in IN}^{p=4} = \{0,\ \underline{1},\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \underline{36},\ 49,\ 64, 81,\ldots,n^2\}$. Facilmente, poderemos identificar, na medida em que adotamos o sistema notacional que $S_3(1) = 1 = S_4(1)$ e que $S_3(2) = 36 = S_4(2)$. Cabe assinalar o caso dos números triangulares que possuem relações com vários outros números figurais. Caglayan (2019) indica algumas transformações no plano, realizadas sobre os números figurais estrela (ao lado esquerdo da Figura 2), de sorte que possam envolvem novas combinações de números triangulares.

Por outro lado, a partir da constatação de dois números que pertencem a ambos os conjuntos, isto é, números que possuem uma espécie de duplo comportamento, são triangulares e quadrados ao mesmo tempo, de modo natural, surgem as perguntas: Existem mais números triangulares e quadrados, isto é, como determinar a seguinte interseção de conjuntos $\{S_3(n)\}_{n\in IN} \cap \{S_4(n)\}_{n\in IN} = \{0,\ 1,\ 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, 1.631.432.881,\ldots\}$? Como determinar uma fórmula explícita ou uma recorrência para tais números?

Figura 2 – Números figurais estrela que são escritos como números figurais triangulares



Fonte: Caglayan (2019, p. 2)

Diante do cenário e questionamento, nas seções subsequentes, abordaremos algumas propriedades e, por fim, constataremos que, por intermédio de estudos originados depois de algum tempo, conseguimos formular algumas respostas aos questionamentos anteriores. Ademais, no que concerne ao teor da discussão subsequente, acentuamos sua relevância no sentido de transmitir, ao professor de Matemática, um significado histórico e epistêmico de certos conceitos em constante evolução (Alves, 2012; Sengupta, 1999).

NÚMEROS TRIANGULARES QUADRADOS E PROPRIEDADES ELEMENTARES

Quando consideramos o conjunto que representa os números figurais triangulares que possuem um comportamento como números quadrados, estabeleceremos a seguinte notação $\{S_{3,4}(n)\}_{n\in IN} = \{S_3(n)\}_{n\in IN} \cap \{S_4(n)\}_{n\in IN}$. Sabemos que a fórmula de um número figural é descrita por $S_3(u) = \frac{u(u+1)}{2}$, enquanto um número quadrado é indicado por $S_2(v) = v^2$. Simplificadamente, buscamos determinar que ocorre com a seguinte igualdade $S_3(u) = \frac{u(u+1)}{2} = v^2 = S_2(v) \leftrightarrow u^2 + u = 2v^2 \leftrightarrow 4u^2 + 4u = 8v^2 \leftrightarrow 4u^2 + 4u + 1 = 8v^2 + 1$. Isto é. podemos escrever que $(4u^2 + 4u + 1) - 2\cdot 4v^2 = 1 \leftrightarrow (\underbrace{2u+1}_{x})^2 - 2(\underbrace{2v}_{y})^2 = 1$.

A partir da expressão anterior, tomaremos o par ordenado $(x,y) = (2u+1, 2v)$ que expressa o comportamento de uma solução para a seguinte equação $x^2 - 2y^2 = 1$. Por exemplo, quando tomamos o par ordenado $(x,y) = (3,2)$ podemos verificar que $3^2 - 2\cdot 2^2 = 1$. Todavia, ao consideramos que $u = \frac{x-1}{2}, v = \frac{y}{2}$ podemos determinar que $u = \frac{3-1}{2} = 1, v = \frac{2}{2} = 1$. Isto é, determinamos a seguinte igualdade aritmética indicada $S_3(1) = \frac{1(1+1)}{2} = 1^2 = S_2(1)$.

Vejamos ainda o par ordenado $(x,y) = (7,12)$ e verificamos que $7^2 - 2(12)^2 = 1$. Ademais, facilmente determinamos que $x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2})$. A partir dessa decomposição, podemos verificar que: $1 = 1^2 = \left[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\right]^2 = (17+12\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})$ $= 17^2 - 2\cdot 12^2$. Ou seja, a partir da solução particular $(x,y) = (3,2)$ conseguimos verificar propriedade semelhante para outros pares ordenados que são soluções. Nesses termos, o par odenado $(x,y) = (3,2)$ será chamado de solução fundamental para a equação $x^2 - 2y^2 = 1$.

No Teorema 1, poderemos constatar que, ao elevarmos o quadrado e outras potências da expressão $\left[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\right]^2$ sempre determinaremos mais soluções do tipo (x_n, y_n) para a equação de Pell associada e indicada por $x^2-2y^2=1$. Como consequência, sempre poderemos determinar um par correspondente (u_n, v_n) dos números triangulares quadrados.

O teorema seguinte proporciona ao leitor a compreensão de uma importante propriedade que costumeiramente é examinada, na medida em que surgem novos conjuntos e/ou novas entidades e categorias abstratas de números (Alves & Cavalcante, 2024). Deza & Deza (2012) explicam que o próprio Euler, em 1730, demonstrou que existem infinitos pares de números que satisfazem determinadas condições relacionadas com equações do tipo Pell. No teorema 1 indicamos uma propriedade fundamental para o conjunto $\left\{S_{3,4}(n)\right\}_{n\in IN}$.

Teorema 1: O conjunto $\left\{S_{3,4}(n)\right\}_{n\in IN}$ dos Nº triangulares quadrados é infinito. (Deza & Deza, 2012).

Demonstração: Para todo inteiro $n \in IN$, vamos considerar alguns casos indicados a seguir $n=3,4,5,6,7,8,9,10$. Ao lado direito, indicamos as soluções encontradas. Por exemplo, tomando $(x_5, y_5)=(3363, 2378)$ e verificamos que $u_5=\frac{3362}{2}=1681, v_5=\frac{2378}{2}=1189$.

Logo a seguir, indicamos alguns casos preliminares que, apesar da existência de grande quantidade de expressões com aparência de um número irracional, na verdade, o resultado da expressão correspondente, em todos os casos, verificamos resultar em um número inteiro!

$$1=1^2=\left[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\right]^2=(17+12\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})=1$$

$$1=1^3=\left[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\right]^3=(99+70\sqrt{2})(99-70\sqrt{2})=1$$

$$1=1^4=\left[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\right]^4=(577+408\sqrt{2})(577-408\sqrt{2})=1$$

$$1=1^5=\left[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\right]^5=(3363+2378\sqrt{2})(3363-2378\sqrt{2})=1$$

$$1=1^6=\left[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\right]^6=(19601+13860\sqrt{2})(19601-13860\sqrt{2})=1$$

$$1=1^7=\left[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\right]^7=(114243+80782\sqrt{2})(114243-80782\sqrt{2})=1$$

$$1=1^8=\left[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\right]^8=(665857+470832\sqrt{2})(665857-470832\sqrt{2})=1$$

$$1=1^9=\left[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\right]^9=(3880899+2744210\sqrt{2})(3880899-2744210\sqrt{2})=1$$

$$1=1^{10}=\left[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\right]^{10}=(22619537+15994428\sqrt{2})(22619537-15994428\sqrt{2})=1$$

A partir dos casos acima, de modo natural, surge o questionamento se o procedimento acima, quando divisamos potências do tipo $(3\pm 2\sqrt{2})$ conseguimos determinar todos os números do tipo $S_{3,4}(n)$. A resposta é sim! O Teorema 2 fornece um modelo definitivo.

Teorema 2: Considerando a equação $x^2-2y^2=1$, então: i) Toda solução, par de inteiros positivos (x_n, y_n) é da forma $(x_k+y_k\sqrt{2})=(3+2\sqrt{2})^k, k=1,2,3,....$. ii) Todo número triangular-quadrado $S_{3,4}(n)$ é determinado pela relação seguinte $u=\frac{x_k-1}{2}, v=\frac{y_k}{2}$. (KOSHY, 2007).

Demonstração: Para verificar o item i), temos que constatar, de modo preliminar que vale a igualdade $u+v\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^k$ para algum inteiro $k\geq 0$. Considerando a igualdade $u+v\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^k$ concluiremos que $u\geq 3$, tendo em vista que, ao lado direito, temos uma expressão binomial da forma $(3+2\sqrt{2})^k$. Repare que se $u=3 \therefore 3+v\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^k \leftrightarrow v=2$, com $k=1$. Todavia, se ocorrer que $u>3$, buscaremos verificar que existiria uma outra solução (s,t), de inteiros positivos, de modo que $u+v\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})(s+t\sqrt{2})$, com a condição de que $s<u$. (*). Mais uma vez, se ocorrer a igualdade indicada $(s,t)=(3,2)$, então podemos escrever a igualdade indicada por $u+v\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})=(3+2\sqrt{2})^2, k=2$. Nada haveria o que fazer e (*) vale, para o inteiro $k=2$! Todavia, caso contrário, buscaremos determinar uma outra solução (q,r), de forma que $s+t\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})(q+r\sqrt{2})$, com $q<s$. Por outro lado, considerando a igualdade indicada por $u+v\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})(s+t\sqrt{2})$, passaremos a determinar que $u+v\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})(q+r\sqrt{2})=(3+2\sqrt{2})^2(q+r\sqrt{2})$. Repetindo o argumento anterior, se ocorrer que $(q,r)=(3,2)$, nada há o que fazer e comprovamos (*), para $k=3$. Reparemos que, neste processo, determinaremos a cadeia de inteiros positivos $0<q<s<u$. Cabe observar que, repetindo o processo anterior, encontraremos outros inteiros que cumprem a condição $0<q<s<u$ e que, em se tratando de números inteiros positivos, em algum momento determinaremos a solução $(3,2)$, ou seja, em alguma etapa, determinaremos um inteiro $k>0$, de sorte que $(x_k+y_k\sqrt{2})=(3+2\sqrt{2})^k$. ■

Cabe observar que no Teorema 2 empregamos o método do descenso infinito [3](*Method of Infinite Descent*), inventado por Fermat (Bussey, 1918). Em seguida, veremos

[3] Jaggia (2013) explica que o Método do descenso finito é baseado no Princípio da Boa Ordenação, que afirma que todo subconjunto não vazio, de números naturais, possui um elemento minimal. A ideia geral consiste em

dois exemplos que confirmam uma espécie de evolução e maior precisão na descrição da recorrência para os números triangulares quadrados.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS: RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA DOS NÚMEROS TRIANGULARES QUADRADOS

Segundo Koshy (2014), A. V. Sylvester, em 1962, resolveu um problema envolvendo a resolução da equação de Pell, definida por $x^2 - 2y^2 = 1$ e que admite infinitas soluções, da maneira que podemos escrever tal equação por $\frac{x^2-1}{2} = y^2$. A. V. Sylvester introduziu a seguinte recorrência $S_{3,4}(1)=1, S_{3,4}(n)=4S_{3,4}(n-1)\cdot(8\cdot S_{3,4}(n-1)+1)$, para todo inteiro $n \geq 2$. Na Tabela 2 indicamos alguns valores numéricos particulares e que confirmam a propriedade e igualdade de certos termos iniciais e propriedades de interesse.

Tabela 2: Alguns valores iniciais da recorrência introduzida por Sylvester, em 1962.

Nº $S_3(n)$	**Recorrência de Sylvester, em 1962 - $S_{3,4}(n)$**	**Nº $S_4(n)$**
$S_3(1)=1$	$S_{3,4}(1)=1=1^2$	$S_4(1)=1^2$
$S_3(4)=36$	$S_{3,4}(2)=4S_{3,4}(1)(8\cdot S_{3,4}(1)+1)=4(8+1)=36$	$S_4(4)=6^2$
$S_3(288)$	$S_{3,4}(3)=4S_{3,4}(2)(8\cdot S_{3,4}(2)+1)=4\cdot 36(8\cdot 36+1)=41.616$	$S_4(204)=204^2$
$S_3(332.928)$	$S_{3,4}(4)=4S_{3,4}(3)\cdot(8\cdot S_{3,4}(3)+1)=$ $S_{3,4}(4)=4\cdot(41.616)\cdot(8\cdot(41.616)+1)=55.420.693.056$	$S_4(235.416)=(235.416)^2$

Fonte: Adaptado a partir de Koshy (2014, p. 110).

Algum tempo depois, na década de 70, Lafer (1971) formulou conjecturas a respeito da seguinte relação de recorrência auxiliar: $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, para todo inteiro $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$ e determinaremos a lista de números: $\{1,2,5,12,29\}$. Além disso, Lafer (1971) explica que, a condição *standard* da verificação $m = \frac{n(n+1)}{2}$, que equivale ao problema de determinar dois inteiros a,b, tais que $m = \frac{a \cdot b}{2}$, com $|a-b|=1$. Em seguida, Lafer (1971) definiu a seguinte recorrência: $S_{3,4}(n) = a_n^2 \cdot (a_n + a_{n-1})^2$, com $n \geq 1$, e valor iniciais $S_{3,4}(1)=1$. Podemos verificar alguns valores iniciais que $S_{3,4}(2)=36$, $S_{3,4}(3)=1225$,

considerar um subconjunto $\varnothing \neq A \subset IN$, com um elemento $a \in A$. Sendo verdadeira a propriedade $P(a)$ verdadeira, deve existir outro conjunto $B \subseteq A$, com um elemento $b \in B$, de sorte que $P(a)$ é válida.

$S_{3,4}(4)=41616$, $S_{3,4}(5)=1.413.721$. Depois disso, o autor afirma que: 1) a sequência dos números da forma $S_{3,4}(n)=a_n^2\cdot(a_n+a_{n-1})^2$ são todos números triangulares-quadrados; 2) tal sequência abrange todo o conjunto dos números triangulares-quadrados.

Por indução, assumiremos que $S_{3,4}(n)=a_n^2(a_n+a_{n-1})^2=\frac{(2a_n^2)\cdot(a_n+a_{n-1})^2}{2}$, com $\left|2a_n^2-(a_n+a_{n-1})^2\right|=1$. Resta verificar que se $S_{3,4}(n+1)=a_{n+1}^2(a_{n+1}+a_n)^2=\frac{(2a_{n+1}^2)\cdot(a_{n+1}+a_n)^2}{2}$, com a condição indicada por $a_{n+1}^2(a_{n+1}+a_n)^2=\frac{2(2a_n+\mathrm{a}_{n-1})^2\cdot[(2a_n+a_{n-1})+a_n]^2}{2}$. Assim, vejamos a condição $\left|2(2a_n+\mathrm{a}_{n-1})^2-(3a_n+a_{n-1})^2\right|=\left|8a_n{}^2+2\mathrm{a}_{n-1}{}^2+8a_{n-1}a_n-9a_n{}^2-a_{n-1}{}^2-6a_{n-1}a_n\right|=$ $=\left|-a_n{}^2+2a_{n-1}a_n+\mathrm{a}_{n-1}{}^2\right|=\left|2a_n{}^2-a_n^2-2a_{n-1}a_n-\mathrm{a}_{n-1}{}^2\right|=\left|2a_n^2-(a_n+a_{n-1})^2\right|=1$, para todo $n\geq 1$. Isto é, o termo geral indicado por Lafer (1971) possui o comportamento de um número triangular, cujo termo geral é dado $S_3(n)=\frac{n(n+1)}{2}$. E, por definição, naturalmente, é também um número quadrado, tendo em vista que o termo geral de um número quadrado é dado por $S_4(n)=n^2$. Na tabela 3 indicamos alguns valores particulares e relações aritméticas!

Tabela 3: Valores numéricos da sequência formulada por Lafer (1971)

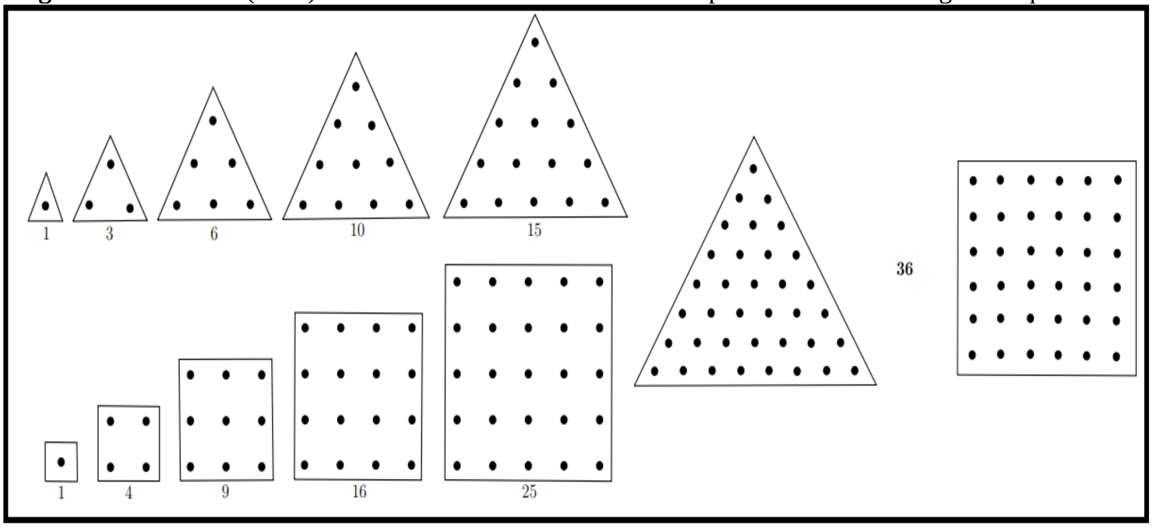
$n\geq 1$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$\{a_n\}_{n\in IN}$	1	2	5	12	29	70	169	408
$\{S_{3,4}(n)\}_{n\in IN}$	1	36	1225	41616	1413721	48024900	1631432881	55420693056

Fonte: Elaborado pelo autor.

TRABALHOS ATUAIS E A RECORRÊNCIA PARA O CONJUNTO $\{S_{3,4}(n)\}_{n\in IN}$

Nos trabalhos de Bouroubi (2019; 2020), encontramos a seguinte relação de recorrência não homogênea $S_{3,4}(n)=34\cdot S_{3,4}(n-1)-S_{3,4}(n-2)+2$, $n\geq 2$ considerando o conjunto $\{S_{3,4}(n)\}_{n\in IN}$, com valores iniciais $S_{3,4}(0)=0, S_{3,4}(1)=1, S_{3,4}(2)=36$. Na Figura 3 podemos visualizar um esquema heurístico empregado por Bouroubi (2019) com o interesse de convencer o leitor sobre a existência e de propriedades envolvendo o primeiro número triangular quadrado. De modo trivial, visualizamos que $S_3(8)=36=6^2=S_4(6)$. A partir de outras propriedades matemáticas, que ultrapassam os limites do campo matemático de interesse do presente trabalho, a relação de recorrência determinada por Bouroubi (2020), embora não com um viés de pioneirismo, possui um caráter diferencial, tendo em vista os métodos matemáticos contemporâneos (Castillo, 2016).

Figura 3 – Bouroubi (2019) descreve um modelo de recorrência para os números triangulares quadrados



Fonte: Elaboração do autor.

Por exemplo, para eliminar a constante tornar tal recorrência homogênea, passaremos a escrever $S_{3,4}(n+1)=34\cdot S_{3,4}(n)-S_{3,4}(n-1)+2$ e $S_{3,4}(n)=34\cdot S_{3,4}(n-1)-S_{3,4}(n-2)+2$. Escrevemos a diferença $S_{3,4}(n+1)-S_{3,4}(n)=34\cdot S_{3,4}(n)-S_{3,4}(n-1)-34\cdot S_{3,4}(n-1)+S_{3,4}(n-2)$. Facilmente, determinaremos que $S_{3,4}(n+1)=35\cdot S_{3,4}(n)-35\cdot S_{3,4}(n-1)+S_{3,4}(n-2)$ e que passa a ser uma recorrência de 3ª ordem e homogênea.

A partir de uma substituição direta, tomando o valor particular $n=1.\therefore S_{3,4}(2)=35\cdot S_{3,4}(1)-35\cdot S_{3,4}(0)+S_{3,4}(-1)\leftrightarrow S_{3,4}(-1)=1$. Repetindo o processo, para $n=0.\therefore S_{3,4}(1)=35\cdot S_{3,4}(0)-35\cdot S_{3,4}(-1)+S_{3,4}(-2)\leftrightarrow S_{3,4}(-2)=36$. Sucessivamente, temos a seguir, alguns valores particulares exibidos na Tabela 4.

Tabela 4 - Extensão da recorrência dos números triangulares quadrados ao campo dos inteiros.

$S_{3,4}(-4)$	$S_{3,4}(-3)$	$S_{3,4}(-2)$	$S_{3,4}(-1)$	$S_{3,4}(0)$	$S_{3,4}(1)$	$S_{3,4}(2)$	$S_{3,4}(3)$	$S_{3,4}(4)$
41616	1225	36	1	0	1	36	1225	41616

Fonte: Elaboração do autor.

Finalmente, com amparo dos argumentos anteriores, por um princípio argumentativo intuitivo, podemos determinar o seguinte conjunto $\{S_{3,4}(-n)\}_{n\in IN}$ que, conforme denominação de Deza & Deza (2012), corresponde à extensão desse conjunto ao campo de índices inteiros.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A História da Matemática proporciona um importante itinerário formativo e de ampliação de uma cultura matemática imprescindível na atividade e oficio do professor (Alves; Catarino, 2022; Alves; Cavalcante, 2024). No presente trabalho discutimos propriedades sobre os números figurais, cuja herança e a contribuição dos antigos gregos são confirmadas por inúmeros autores de livros de História da Matemática (Burton, 1995) e que constituem importante um assunto importante para o conhecimento do professor de Matemática (Alves, 2012). Não obstante, a partir da constatação de alguns trabalhos atuais, poderemos compreender alguns avanços e um interesse contemporâneo envolvendo a pesquisa em torno dos números figurais de comportamento híbrido como, por exemplo, o caso dos números triangulares quadrados e que colocamos em evidência, nas seções predecessoras, outras propriedades básicas.

Finalmente, diante dos dois questionamentos formulados, podemos afirmar que existem infinitos números figurais triangulares quadrados (Alves; Catarino; Vieira, 2024) e, além disso, eles admitem processo de extensão de índices ao campo dos inteiros, como indicamos pelo conjunto $\{S_{3,4}(-n)\}_{n\in IN} = \{S_3(-n)\}_{n\in IN} \bigcap \{S_4(-n)\}_{n\in IN}$. Indicamos ao leitor mais interessado consultar outros trabalhos sobre o tema e que podem confirmar sua natureza e extensão no interior da Matemática. Ademais, em nosso caso de interesse, constatamos que a noção de recorrência possui um papel fundamental visando uma compreensão evolutiva dos métodos examinados e pormenorizados, na medida do possível, o presente trabalho. Neste sentido, os trabalhos de Bouroubi (2019; 2020) confirmam uma tendência de sua formulação moderna na pesquisa atual desenvolvida em vários países.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos o apoio e suporte financeiro concedido no Brasil pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, correspondente ao processo de nº 305495/2022-4.

REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V. História da Matemática: números figurais 2D e 3D, **Revista Conexões, Ciência e Tecnologia**, v.6, nº 2, 40 – 55, 2012.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. C. A sequência de Padovan ou Coordonier: **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 22, nº 45, 1 – 25, 2022.

ALVES, F. R. V.; CAVALCANTE, P. C. O. Sobre os números p-ádicos: aspectos históricos, matemáticos e epistemológicos, **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 24, nº 48, 1 – 32, 2024.

ALVES, F. R. V.; VIEIRA, R. P. M; CATARINO. P. M. C. Números triangulares-quadrados-pentagonais: relações n-dimensionais, função geradora e sequência de Matrizes, **Revista UFOP – Matemática**, v. 2, nº 1, 1 – 22, 2024.

ASIRU. M. A., All square chiliagonal numbers, **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 47, nº 7, 2016.

BOUROUBI, Sadek. A new explicit formula for a square-triangular numbers, **Rostock. Math. Kolloq**, v. 72, nº 3, 73 – 80, 2019.

BOUROUBI, Sadek. On the Square-Triangular Numbers and Balancing-Numbers, **Rostock. Math. Kolloq**, v. 72, nº 3, 73 – 80, 2020.

BURTON, D. M., **History of Mathematics**, Wm C. Brown Publication, Iowa, 1995.

BUSSEY, W. H. Fermat's Method of Infinite Descent, **The American Mathematical Monthly**, v. 25, nº 8, 333 – 337, 1918.

CAGLAYAN, G. A Relationship of Triangular and Star Numbers, **Mathematics Magazine**, v. 95, nº 5, 1 – 5, 2019.

CASTILLO. R. C. A Survey on Triangular Number, Factorial and Some Associated Numbers, **Indian Journal of Science and Technology**, v. 9 nº 41, 1 – 7, 2016.

CHRISTIANIDIS, J.; OAKS, J. **The Arithmetica of *Diophantus*: a Complete Translation and Commentary**, New York: Routledge, 2023.

DEZA, H.; DEZA, M. M.. **Figurate Numbers**, London: World Scientific, 2012.

DICKSON, L. E. **History of the Theory of Numbers**, Volume 2, Strechert, New York, 1971.

HEATH, T. **Diophantus of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra,** Cambridge: University Press, 1910.

KOSHY, T. **Pell and Pell-Lucas with application**, New York Springer, 2014.

KOSHY, T. **Elementary Number Theory with Applications**, London: Elsevier, 2007.

JAGGIA, A. On Fermat´s method of infinite descent, **Journal of Mathematics of McGill University**, v.3. nº 1, 1 – 16, 2013.

LAFER, P. Discovering the square-triangular numbers, **The Fibonacci Quartterly**, v 9. Nº 1, 93 – 105, 1971.

RIBENBOIM, P. **My Numbers, My Friends**, Springer-Verlag, New York, Inc., 2000.

ROBOLD, A. I. Manipulative Models for Figurate Numbers, **School Science and Mathematics**, v. 89, nº 1, 1989.

SENGUPTA, D. C, Triangular Squares using *Mathematica*, 4th **Asian Technology Conference in Mathematica**, China, 1 – 9, 1999.