RHMP
REVISTA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

ISSN: 2317-9546 ***e*-ISSN**: 2675-715X

MATEMÁTICA E LINGUÍSTICA NA CIVILIZAÇÃO ISLÂMICA DO SÉCULO XII: UM PROBLEMA DE COMBINATÓRIA

Davidson Paulo Azevedo Oliveira[1]

Lázaro Santos Gil[2]

Flávio Guilherme de Abreu Drumond[3]

RESUMO

O estudo de problemas de contagem se inicia no Ensino Fundamental e se aprofunda no Ensino Médio, incluindo problemas complexos, como a quantidade de anagramas que podem ser formados a partir de uma palavra. De modo similar, Ahmad al-Muncim (?–1228), um estudioso islâmico do século XII, escreveu uma obra na qual apresentou um problema envolvendo quantidades de palavras que podem ser formadas a partir de determinado número de letras. Ele não apenas recorreu à tradição islâmica de resolução por meio de tabelas, mas também introduziu o uso de fórmulas para oferecer soluções ao problema. Neste artigo, exploramos tanto a solução proposta por al-Muncim, na tentativa de sermos não-anacrônicos, e uma abordagem pedagógica moderna, inspirada pelo Presentismo Pedagógico defendido por Fendler, que viabiliza a discussão desse problema em sala de aula, incentivando uma compreensão crítica e destacando a riqueza da matemática não-eurocêntrica.

Palavras-chave: Matemática Islâmica. Análise Combinatória. Não-eurocentrismo.

INTRODUÇÃO

Nos primeiros anos do Ensino Fundamental, iniciamos o estudo de problemas de contagem e aprofundamos esse tema no Ensino Médio, abordando problemas mais complexos, que envolvem fórmulas matemáticas. Muitas vezes, esses problemas se concentram na permutação ou arranjo de palavras a partir de determinadas letras. No século XII, essa prática não era diferente. De acordo com Berggren (2013), nessa época, na região do Magrebe, ao noroeste do continente Africano, estudiosos desenvolveram teorias para resolver problemas mais amplos de quantidade de palavras que podem ser formadas.

Djebbar (1985) analisa as influências e interesses de estudiosos islâmicos na região do Magrebe, que se dedicaram ao que hoje chamamos de problemas de análise combinatória.

[1] Docente do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET MG), Belo Horizonte, Minas Gerais. Doutor em Educação Matemática pela Unesp – Rio Claro. E-mail: davidson@cefetmg.br

[2] Docente do Instituto Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (IFMG). Ouro Preto. Minas Gerais. Mestre em Matemática pela UFV. E-mail: lazaro.gil@ifmg.edu.br

[3] Docente do Instituto Federal de Tocantins. Colinas do Tocantins. Tocantins. Mestre em Matemática pela UFV. E-mail: drumondflavio@gmail.com
.

Segundo o autor, o conhecimento desses estudiosos derivava de duas tradições: uma relacionada à Linguística e à Gramática da língua árabe, e outra caracterizada por uma inclinação mais forte para Astronomia, Música e Álgebra.

A região do norte da África foi dominada pelos islâmicos, sendo o árabe o idioma oficial e mais falado. Nosso objetivo é compartilhar com os colegas professores, a partir de uma tradução francesa, um dos problemas apresentados por Ahmad al-Muncim (?–1228), em um manuscrito do século XIII. Acreditamos que esse problema, por ter um enunciado inicialmente simples e características linguísticas específicas, possui um grande potencial para ser discutido com os estudantes do Ensino Médio.

Embora o historiador argelino Djebbar (1985) apresente uma resolução moderna para esse problema, acreditamos que ele requer uma abordagem mais didática. Por isso, contribuímos com uma solução em notação moderna. Reconhecemos que isso pode representar um anacronismo em análises históricas, conforme observado por Rojas (2013), no entanto, apoiamo-nos no conceito de Presentismo Pedagógico de Fendler (2009) para adaptar o entendimento desse problema ao contexto da sala de aula do ensino básico, acreditando ser a melhor maneira de visualizar tanto o problema matemático quanto o contexto cultural no qual estava inserido.

CONCEPÇÕES TEÓRICAS

Entendemos que, ao estudar as contribuições científicas e, em especial, ao apresentar a Matemática da civilização islâmica com uma abordagem pedagógica, podemos contribuir para a expansão dos horizontes e auxiliar o rompimento com o eurocentrismo (Soares; Oliveira, 2022). Entretanto, o anacronismo “de ontem para hoje”, conforme definido por Barros (2017), pode ser um entrave tanto ao historiador quanto ao professor.

Esse obstáculo pode ser superado a partir da concepção do Presentismo Pedagógico como defendido por Fendler (2009), admitindo que visões, conceitos e valores do presente sejam projetados na leitura da história do passado, de modo que essa interpretação, ao ser orientada por perspectivas e conceitos atuais, seja, para a sala de aula, discutida com os estudantes juntamente com o conceito de anacronismo. Fendler (2009) ainda defende que um dos pontos positivos de uma visão presentista pode ser a oportunidade de gerar uma compreensão crítica de nossas circunstâncias presentes.

Destacamos que Fendler (2009) não defende que historiadores profissionais possam fazer análises anacrônicas de documentos, mas a ênfase do que ela denomina Presentismo

Pedagógico é dada para professores em sala de aula. Portanto, o Presentismo Pedagógico, na concepção da pesquisadora, pode ser incorporado em momentos viáveis em sala de aula, na análise de uma produção científica histórica em um contexto.

AL-MUNCIM E SUA OBRA

Sobre a vida de Ahmad al-Muncim, sabemos que trabalhou em Marraquexe e morreu nesta cidade em 1228. Além disso, escreveu uma importante obra dedicada a estudantes, entre 1207 e 1212, denominada *A Jurisprudência da Aritmética*, que, na versão árabe transliterada, lê-se *Fiqh al-hisab*. De acordo com Djebbar (1985), o objetivo dele era reunir, em um único trabalho, cálculos aritméticos práticos e teóricos, algo que era novidade na época. Na parte teórica, destacamos a seção XI, que é dedicada ao que denominamos de análise combinatória, a qual acrescenta à tradição da resolução de problemas por tabelas, como o costume, o uso de fórmulas, ainda que não simbólicas como as atuais.

O estudioso marroquino escreveu em árabe, mas o trabalho foi traduzido para o francês pelo historiador argeliano Ahmed Djebbar (1985), o que nos permite a leitura do trabalho e discussões de adaptação pedagógica. Na tradução, são enumerados dez problemas de análise combinatória e discutiremos o quarto problema que, apesar do enunciado relativamente simples, pelas peculiaridades da Língua Árabe, apresenta um raciocínio interessante para a resolução e nos leva a uma fórmula de recorrência.

De acordo com Oliveira (2021), al-Muncim apresenta seus problemas com um grau de dificuldade crescente e constrói sua teoria passo a passo com os estudantes. O primeiro problema permitia a manipulação concreta do raciocínio por meio de construção de borlas com fios de seda. A partir do segundo, ele sugeria quantas palavras poderiam ser construídas a partir de um certo número de letras, inicialmente sem repetição, até que se chegasse ao quarto problema, apresentado e discutido neste artigo e que denominaremos de “o problema das vogais”.

O PROBLEMA DAS VOGAIS

Para a apresentação e discussão deste problema, é importante salientar, inicialmente, que o texto se trata do Árabe Clássico e conhecimentos básicos do idioma são necessários, por exemplo, o fato0 de o alfabeto ser constituído por 28 caracteres, todos representando consoantes. Portanto, quando, no enunciado, al-Muncim diz que “o número de letras é conhecido” ele quer dizer que o número de consoantes é fixo. Além disso, ele não considera a posição das letras da palavra, ou seja, não considera a permutação das consoantes. Em uma tradução livre para o português, a partir do francês, o problema é o seguinte:

> Queremos conhecer o número de configurações de uma palavra, sabendo que o número de letras é conhecido e levando em consideração as vogais e *sukuns*, que se sucedem nas letras e não nas posições das letras da palavra (Djebbar, 1985, p. 57-58, tradução nossa).

Em relação à Língua Árabe, tanto o Árabe Clássico quanto o Moderno, temos que destacar características importantes para que se entenda o problema proposto e as dificuldades inerentes à resolução. Ryding (2005, p. 31) explica o que é o *sukun* presente no enunciado no Árabe Clássico. Segundo o autor:

> A consoante nem sempre é seguida de vogais. Às vezes uma consoante vem imediatamente seguida por outra, ou uma consoante está no final da palavra. De modo a indicar claramente que a consoante não é seguida por uma vogal, o idioma árabe usa uma marca diacrítica chamada *sukun* (silêncio) que parece um mini zero colocado diretamente sobre a consoante.

A fim de vocalizar uma consoante, o idioma árabe faz uso de três vogais, que podem ser curtas ou longas, e um *sukun*. Para a solução do problema, o leitor deve saber que uma palavra não pode ser iniciada por um *sukun* e, além disso, dois *sukuns* não podem estar em sequência.

A resolução discutida e apresentada por al-Muncim é textual, os casos são separados e palavras formadas com uma quantidade de consoantes que varia de um a dez. Sendo que, para palavras constituídas por uma consoante, é fácil ver que temos três opções, visto que são somente as três vogais e o sinal diacrítico, *sukun*, não pode ser utilizado. Apesar de o trabalho dele ser focado em palavras de até dez letras, al-Muncim continua a resolução deste problema para palavras de até seis consoantes, sendo que o resultado depende do encontrado para palavras de cinco e três letras.

A partir desse raciocínio ele enuncia o que podemos denominar anacronicamente de fórmula geral, o que representa, segundo Djebbar (1985), uma ruptura no modo como eram resolvidos problemas dessa natureza antes de al-Muncim, restrito à apresentação de tabelas. Essa fórmula é apresentada em texto escrito e não em símbolos e enunciada conforme a seguir:

> Existe, para este problema, outro método que consiste em remover duas letras da palavra e a multiplicar por três o número de configurações dos restantes, tendo em vista as vogais e os sukuns, e a conservar o produto que será o primeiro resultado,

então remover uma das letras da palavra e multiplicar por três o número de configurações do resto, do ponto de vista das vogais e sukuns. Ao resultado, acrescente o produto preservado. A soma é igual ao número de configurações da palavra do ponto de vista das vogais e sukuns. (Djebbar, 1985, p. 59, tradução nossa).

Para manter a tradição de apresentar os resultados em tabelas e, segundo al-Muncim, evitar a repetição de cálculos, ele termina a resolução com uma tabela dos resultados para palavras de um a dez consoantes. Na figura a seguir, o leitor pode observar essa tabela, bem como os resultados do número de configurações de palavras de acordo com vogais e *sukuns* sem levar em consideração a permutação das consoantes.

Figura 1 – Tabela com a resolução

Tableau du nombre des configurations des mots selon les voyelles et les sukūn qui [se succèdent] et non selon les permutations des lettres									
mot de dix lettre	de neuf let.	de huit let.	de sept let.	de six let.	de cinq let.	de quatre let.	de trois let.	de deux let.	d'une let.
507627	133893	35316	9315	2457	648	171	45	12	3

Fonte: Djebbar (1985, p. 60).

Esses resultados podem ser vistos também na versão árabe no texto apresentado por Djebbar (1985). Para entendimento do leitor ressaltamos outra característica do idioma árabe, a escrita se dá da direita para a esquerda, por isso a figura seguinte ilustra a tabela em ordem distinta da anterior, em francês.

Figura 2– Tabela com a resolução em árabe

جدول ما تتضاعف به الكلمات لأجل الحركات و السواكن المتعاقبات على حرف من حروف الكلمة									
مفرد	مثنى	مثلث	مربع	مخمس	مسدس	مسبع	مثمن	متسع	معشر
3	12	45	171	648	2457	9315	35316	133893	507627

Fonte: Djebbar (1985, p. 86)

O problema apresentado, a partir do próprio contexto no qual foi inserido, carrega consigo uma potencialidade de trabalho com História da Matemática em sala de aula e discussão sobre o não-eurocentrismo, permitindo aos estudantes o contato com características linguísticas distintas da língua portuguesa. Entretanto, para entendimento do conhecimento matemático presente no problema, a notação moderna se faz necessária, de acordo com a concepção de Fendler (2009).

DISCUSSÃO DO PROBLEMA COM NOTAÇÃO MODERNA

De modo a utilizarmos uma notação e pensamentos modernos neste problema, o enunciaremos de modo distinto, preservando suas características.

Dessa forma: considere as quatro letras do alfabeto latino *a*, *e*, *i*, *y*. Quantas palavras podemos formar sabendo que uma palavra não pode se iniciar com *y* (representando o *sukun* árabe) e que não podemos ter dois *y* seguidos. O número de letras dos anagramas é indefinido e deve ser calculado de modo geral.

O problema, então, será resolvido em casos, considerando palavras de uma a dez letras enumerando os primeiros casos. Observe que, para o primeiro caso, no qual temos apenas uma letra, existem três opções, são elas: *a*; *e*; *i*, visto que não pode se iniciar com *y*.

O segundo caso considerado é a formação de palavras a partir de duas letras, cada vogal poderá ser seguida por 4 letras, formando assim as seguinte doze combinações: *aa*; *ae*; *ai*; *ay*; *ea*; *ee*; *ei*; *ey*; *ia*; *ie*; *ii*; *iy*. Para o caso de duas letras, cada vogal poderá ser seguida novamente por 4 letras, entretanto a letra *y* não poderá ser seguida por *y*. Tendo apenas 3 opções nessas condições e que deverão ser descartadas, *ya*, *ye*, *yi*.

Para determinarmos o número de anagramas com três letras podemos então seguir por dois caminhos: o primeiro seria multiplicando por 4 o número de vogais que aparecem no final de cada anagrama com duas letras e somando o número de *y* que aparecem no final de cada anagrama com duas letras, multiplicando por 3. Dessa forma, teríamos o seguinte cálculo: 4 x 9 somados ao produto de 3 x 3, o que resulta em 45. Uma outra forma é multiplicarmos o número total de anagramas com duas letras por 4, e subtrair os anagramas que não são solução para o problema, para este caso seriam: *ayy*; *eyy*; *iyy*.

Observamos que, para determinar a quantidade de anagramas com 3 letras, podemos multiplicar por 4 o total de anagramas com duas letras e subtrair a quantidade de anagramas que contém o *y* na segunda letra. Uma vez que ele não seguirá com 4 opções, precisamos retirar os casos em que aconteça a sequência *yy* e, neste caso, a quantidade de anagramas com 3 letras é calculado da seguinte maneira, 4 x 12 - 3 = 45.

Optaremos por seguir a segunda linha de raciocínio, na qual temos a quantidade de anagramas com *n* letras. Para determinar a quantidade de anagramas com *n*+1 letras, faremos o processo de multiplicar a quantidade de anagramas com *n* letras por 4 e subtraímos a quantidade de anagramas de *n* letras que tem o *y* na última letra.

Esse raciocínio de recorrência pode ser sintetizado seguindo as tradições da matemática islâmica que, conforme afirma Djebbar (1985), anteriormente a al-Muncim, apresentavam os raciocínios combinatórios por meio de tabelas, ilustrada a seguir:

Tabela 1 - Síntese dos resultados do problema

Nº de palavras	Nº de anagramas (a_n)	Nº de palavras ter-minadas em y (b_n)	Nº de palavras que termina com vogal (c_n)
1	3	0	3
2	4x3-0 =12	3	12-3=9
3	4x12-3 =45	9	45-9=36
4	4x45-9=171	36	171-36=135
5	4x171-36=648	135	648-135=513
6	4x648-135=2457	513	2457-513=1944
7	4x2457 –513=9315	1944	9315-1944=7371
8	4x9315-1944=35316	7371	35316-7371=27945
9	4x35316-7371=133893	27945	133893-27945=105948
10	4x133893-27945 = 507627	105948	507627-105948=401679

Fonte: Produzido pelos autores

A tabela 1 ilustra os resultados para palavras formadas com até dez letras, sendo o *sukun* uma delas. No entanto, o problema que apresentamos foi resolvido no documento do século XIII não só por meio de tabelas, mas por fórmulas, ainda que em uma concepção distinta da atual. Seguindo o exemplo do autor do texto analisado, al-Muncim, apresentamos, em notação moderna, uma resolução para este problema por meio de uma fórmula, em uma perspectiva presentista, na concepção de Fendler (2009):

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 12; \qquad a_{n+1} = 4 \times a_n + (-1)^n \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_i, \forall n \geq 2.$$

Notamos que a fórmula envolve não só uma matemática moderna, mas avançada ao se utilizar a notação de somatório em uma recursividade. Cabe ao professor decidir se utilizará a resolução tabular ou fórmula de recorrência em sua sala de aula, a depender do nível de seus estudantes.

CONSIDERAÇÕES

Neste estudo, apresentamos um problema de análise combinatória, baseado em um problema discutido por um estudioso islâmico da Idade Média, Ahmad al-Muncim, que trouxe grandes contribuições para o que denominamos atualmente de análise combinatória. Para a verificação desse problema, recorremos a duas resoluções: a primeira seguindo o modo como o próprio estudioso traz em sua obra, sendo não-anacrônica; e a segunda voltada para a prática de sala de aula no ensino básico. Para esta, foi utilizada uma notação algébrica moderna, que, embora anacrônica, é defendida por Fendler (2009) como uma adaptação pedagógica.

O problema tem o potencial pedagógico de levar para a sala de aula tanto discussões sobre a matemática não-eurocêntrica, com contribuições de povos não europeus (que muitas vezes são negligenciados em livros didáticos e de História da Matemática, nos quais outras culturas podem ser destacadas), quanto um conteúdo matemático mais avançado, que pode ser explorado ao se discutir fórmulas de recorrência e notação de somatório.

Não era objetivo nosso apresentar discussões nas quais o problema foi utilizado em sala de aula, cabendo a publicações futuras o relato e análise das repercussões que este problema proporcionou em uma sala de aula do Ensino Médio. Portanto, neste estudo, discutimos tanto a cultura não-eurocêntrica quanto as duas soluções modernas apresentadas para o problema proposto por Ahmad al-Muncim.

REFERÊNCIAS

BARROS, J. A. Os conceitos na história: considerações sobre o anacronismo. **Ler História**. 71. 155-180. 10.4000/lerhistoria.2930, 2017.

BERGGREN, L. Islamic Mathematics. In: **The Cambridge History of Science**. volume 2. Medieval Science. Edited by David Lindberg and Michael Shank. Cambridge University Press New York, 2013.

DJEBBAR, A**. Lánalyse combinatoire au Maghreb**: l´exemple d´Ibh Muncim (XIIe – XIIIIe siècles), Paris, Université Paris-Sud. 1985.

FENDLER, I. The upside of Presentism. Professorado**. Revista de Currículum y Formación de Professorado**, Vol. 13, Núm. 2, pp. 1-15. Universidade de Granada. España. Agosto de 2009.

OLIVEIRA, D. P. A. Notas de Análise Combinatória na Matemática Islâmica.Número Especial –I Encontro Cearense de Educação Matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**–Volume 08, Número 23, 677–690, 2021.

ROJAS, Carlos Antonio Aguirre. Antimanual del mal historiador – o Como hacer hoy uma buena historia crítica?. **Clássicos de la Historia Crítica**. Volume 7. Ediciones Desde Abajo. Bogotá. Colômbia. 128 p. 2013.

RYDING, K. **A Reference Grammar of Modern Standard Arabic**. Cambridge University Press. Edinburg. 2005.

SOARES, S. de J. C.; OLIVEIRA, D. P. A. A Álgebra Islâmica Magrebina no Rafc Al-Hijab De Ibn Al-Banna. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 9, n. 26, p. 396–409, 2022. DOI: 10.30938/bocehm.v9i26.7993. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/7993. Acesso em: 22 abr. 2024.

Submetido em: 24 de abril de 2024.
Aprovado em: 19 de junho de 2024.