RHMP
REVISTA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

ISSN: 2317-9546 ***e*-ISSN**: 2675-715X

DO QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES AO SURGIMENTO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Lucas Ferreira Gomes[1]

Eliane Maria de Oliveira Araman[2]

RESUMO

Neste artigo, propomos uma investigação detalhada sobre o surgimento das geometrias não euclidianas, com o intuito de oferecer uma reconstrução historiográfica. Para tanto, dedicamos atenção à obra de Euclides, Os Elementos, explorando especificamente o quinto postulado e as diversas tentativas de sua prova ao longo do tempo. Também discutimos as contribuições notáveis para este campo dadas por de três figuras proeminentes na história da matemática: Nikolay Ivanovich Lobachevsky (1792 – 1856), János Bolyai (1802 – 1860) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Analisamos as suas inovações e descobertas que levaram à construção dos conceitos fundamentais da geometria hiperbólica, destacando como essas abordagens não tradicionais da geometria desafiaram e enriqueceram nossa compreensão do espaço e suas propriedades.

Palavras-chave: Euclides. Quinto Postulado. Geometrias Não Euclidianas. Historiografia. História da Matemática.

INTRODUÇÃO

Neste texto, propomos uma reconstrução histórica do desenvolvimento das geometrias não euclidianas, para tal fim partimos de construções históricas já elaboradas. Para tanto, consideramos as perspectivas de vários historiadores, entendendo, como destaca Koyré (1973, p. 379), que cada historiador reflete em sua interpretação, os interesses e valores de sua época, influenciando assim sua reconstrução. No contexto deste artigo, a elaboração segue um propósito historiográfico específico, que professores interessados em integrar a História da Matemática em suas aulas possam ser incentivados a explorar os conceitos aqui apresentados.

No que concerne, oferecemos um panorama histórico do desenvolvimento das geometrias não euclidianas, com o intuito de contribuir tanto para a História da Matemática quanto para o enriquecimento do conhecimento e da cultura do professor de Matemática. Como

[1] Colégio Estadual Santa Maria Goretti, Maringá, Paraná. Doutorando em Educação Matemática pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS). E-mail: ferreira.gomes.lucas@escola.pr.gov.br.

[2] Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Cornélio Procópio, Paraná. Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). E-mail: elianearaman@utfpr.edu.br.

Klein (2004, p. 2) destaca, "esperamos que discussões desse tipo contribuam para a cultura matemática geral: além do conhecimento de detalhes específicos (técnicas) adquirido nas várias disciplinas, deve haver uma compreensão dos conteúdos e das relações históricas existentes entre eles".

Nossa abordagem abrange uma reflexão sobre Euclides e sua obra fundamental, "Os Elementos". Dentro desse contexto, dedicamo-nos à investigação do quinto postulado de Euclides, também conhecido como o postulado das paralelas, e apresentamos algumas das várias tentativas de sua prova ao longo do tempo. Além disso, exploramos o surgimento das geometrias não euclidianas e alguns de seus conceitos, principalmente os relacionados à geometria hiperbólica, entre outros aspectos significativos para enriquecer essa discussão histórica.

EUCLIDES DE ALEXANDRIA E SUA OBRA *OS ELEMENTOS*

É verdade que discutir Euclides é algo intrigante, pois há várias incertezas a respeito de sua existência como pessoa. Como observado por Eves (2011, p. 167), "é desapontador, mas pouco se sabe sobre a vida e personalidade de Euclides", mesmo assim ele é amplamente reconhecido como um dos maiores nomes na História da Matemática. Nobre (2009) apresenta três principais suposições sobre quem foi Euclides: a primeira sugere que ele viveu entre 325 a.C. e 265 a.C. em Alexandria, onde elaborou os volumes que compõem a obra "Os Elementos"; a segunda sugere que o termo "Euclides" era um codinome usado por um grupo de matemáticos em referência a Euclides de Megara, que existiu aproximadamente cem anos antes; e a terceira sugere que esse estudioso da matemática estava liderando um grupo de pesquisadores da matemática de Alexandria, que produziam diversos estudos em seu nome.

Seguindo a primeira suposição, historiadores como Katz (2011) e Nobre (2002) sugerem que Euclides passou a maior parte de sua vida investigando e ensinando Geometria, após ser formado pela Escola Platônica de Atenas. Ele também teria sido associado ao Museu de Alexandria, uma instituição que tentava organizar todo o conhecimento científico da época grega (BRITO, 1995). Fundado por volta de 300 a.C. por Ptolomeu I, o Museu tornou-se um importante centro de estudos, onde se reuniam os principais pensadores da época.

As obras que compõem Os Elementos foram escritas há aproximadamente 2300 anos e, apesar da ausência de um texto original, manuscritos em grego, árabe e latim alcançaram a Europa no século XII, ressaltando a significância desse trabalho para a Matemática. Sua tradução para diversas línguas e as inúmeras edições desde o advento da imprensa evidenciam tal importância. A cópia mais antiga conhecida foi publicada por Théon de Alexandria, um estudioso do século IV, responsável por traduzir e editar a obra (KATZ, 2011).

Distribuídos em treze livros, eles exploram diferentes tópicos da Matemática: os volumes I, III, IV, XI, XII e XIII tratam de elementos da geometria; o volume II aborda transformações de áreas e a álgebra geométrica; o volume V apresenta a teoria das proporções de Eudoxo; os volumes VII e VIII discutem a teoria dos números, incluindo o algoritmo euclidiano; o volume IX demonstra a infinitude dos números; e, por fim, o volume X trata dos números irracionais, atribuídos a Teeteto, mas com contribuições de Euclides (NASCIMENTO, 2013). E é no primeiro livro de "Os Elementos" que encontramos os famosos postulados que deram forma à Geometria Euclidiana Plana:

> I. Pode-se traçar uma (única) reta ligando dois pontos. II. Pode-se prolongar (de uma única maneira) uma reta finita continuamente em uma linha reta. III. Pode-se traçar um círculo com centro qualquer e raio qualquer. IV. Todos os ângulos retos são iguais. V. Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado cuja soma é menor que dois retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram naquele lado cuja soma dos ângulos internos é menor que dois retos. (BICUDO, 2009, p. 98)

Destes, o quinto postulado foi o mais estudado e tornou-se alvo de diversas críticas, especialmente devido à sua falta de simplicidade (KATZ, 2011). Ademais, segundo Brito (1995), Proclo, um estudioso de Os Elementos no século V, observou que as 28 primeiras proposições do trabalho (de um total de 465) são demonstradas sem utilizá-lo, embora muitas delas pudessem ser mais facilmente demonstradas se tal postulado fosse empregado.

ALGUMAS DAS TENTATIVAS DE PROVA DO QUINTO POSTULADO

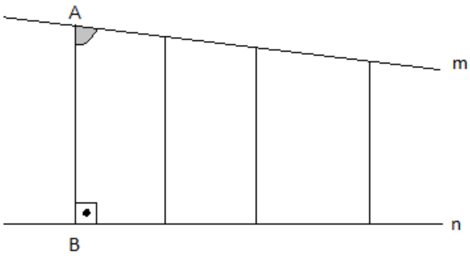
Ao longo da história, numerosos matemáticos empenharam-se em tentar provar o quinto postulado, buscando transformá-lo em uma proposição e esse desafio permaneceu sem solução por mais de 2000 anos. Estas tentativas falharam porque estes estudiosos levaram tempo para compreender que o quinto postulado é independente dos quatro primeiros. Ptolomeu (90-168) foi um dos matemáticos que se propôs a essa empreitada. Sua abordagem partiu do argumento de que se uma reta intercepta outra, então intercepta todas as retas paralelas a essa reta dada.

Proclo Diádoco (410-485), um matemático, filósofo e historiador, também tentou prová-lo, além de apontar alguns equívocos nas demonstrações de Ptolomeu. Em sua tentativa, Proclo primeiro buscou provar que se uma reta corta uma de duas paralelas, então cortará a outra, para depois tentar provar o quinto postulado (SACHS, 2016). No entanto, essa tentativa foi criticada porque, assim como não se pode afirmar que duas linhas que continuamente se aproximam se encontrarão em um ponto, também não se pode afirmar que um par de retas que continuamente se afastam terão uma distância maior do que qualquer distância atribuída.

Com o declínio da influência grega e a ascensão do islamismo no mundo árabe no século VII, o interesse pela Matemática, incluindo a investigação sobre o quinto postulado de Euclides, continuou. Neste estudo, destacam-se Omar Al-Khayyam (1048-1131) e Nasir Ad-Din Al-Tusi (1201-1274), este último editor de uma das versões árabes de Os Elementos. Al-Khayyam não tinha dúvidas de que era possível provar o quinto postulado. Em sua tentativa, ele propôs oito novas proposições e, conforme Sachs (2016, p. 19), "Uma delas afirmava que se um quadrilátero simétrico possui dois ângulos retos, então os outros dois também são ângulos retos”. O problema reside exatamente nessa proposição: ela é equivalente[3] ao quinto postulado".

Sachs (2016) também destaca que o matemático Nasir ad-Din, da cidade de Tus, publicou no ano de 1250 sua tentativa de prova no livro intitulado "Discussão que elimina dúvidas sobre as linhas paralelas". Ele se inspirou no mesmo quadrilátero de Al-Khayyam e usou o seguinte axioma: Sejam *m* e *n* duas retas, *A* um ponto de *m* e *B* um ponto de *n*, tais que *AB* é perpendicular à *n* e forma um ângulo agudo com *m*. Então as perpendiculares baixadas de *m* à reta *n*, do lado do ângulo agudo, são menores do que *AB* e as que ficam do outro lado são maiores do que *AB.* (BARBOSA, 1995, p. 21). No entanto, este axioma também era equivalente ao quinto postulado. Sua proposta está representada na Figura 1:

Figura 1 - A demonstração proposta por Nasir



Fonte: O Autor

Ele não teve sucesso em sua tentativa; no entanto, a partir de outros estudos e tentativas, pôde demonstrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo euclidiano resulta em 180º (BARBOSA, 1995).

[3] Em matemática, especialmente na geometria, os postulados são declarações básicas que são aceitas como verdadeiras sem necessidade de prova. Se dois postulados são equivalentes, significa que ambos descrevem a mesma condição ou propriedade geométrica, mas podem estar articulados de maneiras diferentes.

Revista História da Matemática para Professores, Natal (RN), v. 10, n.1, p. 1-12, 2024. *e*-ISSN: 2675-715X

Com o advento do Renascimento no mundo ocidental, ocorreram profundas transformações na economia, cultura, religião e ciência. Segundo Chabert (1997), embora alguns matemáticos da época tenham se dedicado ao estudo do quinto postulado de Euclides, apenas o britânico John Wallis (1616-1703) deu uma contribuição verdadeiramente original. Em sua tentativa, ele utilizou a seguinte proposição: "dado um triângulo, é possível construir outro semelhante, com lados arbitrariamente grandes" (BARBOSA, 2002, p. 27). No entanto, essa proposição, além de ser equivalente ao quinto postulado de Euclides, considera que ele é dependente dos outros quatro postulados.

O padre jesuíta Girolamo Saccheri (1667-1733) também colaborou com o estudo do postulado das paralelas, publicando suas ideias em 1733 no livro “Euclides sem falhas”. Contrariamente às tentativas anteriores, ele sugeriu que o quinto postulado era, na verdade, um teorema, usando a abordagem da redução ao absurdo. Saccheri assumiu a negação do postulado das paralelas e procurou uma contradição a partir dela. Assim como os matemáticos árabes, ele adotou como hipótese um quadrilátero simétrico com dois ângulos retos e os outros dois iguais entre si, considerando três possíveis hipóteses para os ângulos superiores, denominados ângulos de vértice: obtusos, agudos ou retos (Figura 2).

Figura 2 - As três hipóteses para o quadrilátero de Saccheri

Fonte: Ribeiro (2012, p. 41)

Saccheri considerou como verdadeiras as hipóteses de os ângulos serem agudos e de os ângulos serem obtusos e, por contradição, buscou demonstrar que a única hipótese viável era a do ângulo reto – assim, estaria demonstrado o quinto postulado. Ele facilmente refutou a hipótese dos ângulos obtusos, pois era incompatível com os outros quatro postulados. Restava, então, descartar a hipótese de os ângulos serem agudos. Contudo, acabou concluindo que essa hipótese poderia ser verdadeira, mas refutou esta hipótese por ser incompatível com a natureza da reta (KATZ, 2011). Se este matemático tivesse percebido que não havia contradições a serem encontradas, ele teria antecipado a criação das geometrias não euclidianas em um século (BARBOSA, 1995).

O matemático Johann Heinrich Lambert (1728-1777) propôs ideias muito semelhantes às de Saccheri. Devido a várias coincidências, muitos historiadores acreditam que Lambert teve contato com suas obras e as utilizou como base para seus estudos (BONOLA, 1955). A proposta de Lambert envolveu um quadrilátero com três ângulos retos e concentrou-se na investigação do quarto ângulo, pois a demonstração de que também era reto provaria o postulado das paralelas. Assim como Saccheri, Lambert explorou três possíveis hipóteses para o quarto ângulo do quadrilátero: ser agudo, obtuso ou reto. Com base neste quadrilátero, ele eliminou a viabilidade da hipótese do ângulo obtuso. Além disso, as outras duas hipóteses eram inconsistentes entre si. Lambert chegou a essas conclusões por outros meios, sem considerar a equivalência de seu quadrilátero ao de seu contemporâneo.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833), um matemático francês, foi um dos últimos matemáticos que tentou provar o quinto postulado; em uma de suas tentativas, ele também utilizou ideias muito semelhantes às de Saccheri, baseando-se na soma dos ângulos internos de um triângulo (NASCIMENTO, 2013). Nessa tentativa, há um argumento ainda não provado: a partir de um ponto qualquer no interior de um ângulo, pode-se desenhar uma reta que corta os dois lados do ângulo (CHABERT, 1997). Esses foram alguns dos inúmeros matemáticos que buscaram provar o postulado das paralelas. Apesar de suas falhas, eles contribuíram com inúmeros resultados que, entre outros feitos, contribuíram para o surgimento do que hoje se conhece por geometrias não euclidianas.

O SURGIMENTO DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS E ALGUNS DE SEUS CONCEITOS

Conforme mencionado anteriormente, alguns matemáticos que investigaram a validade do quinto postulado de Euclides produziram resultados significativos. Entretanto, não perceberam que o quinto postulado não era passível de prova (por não ser dedutível dos postulados 1 a 4) e que podia ser negado sem gerar contradições (SACHS, 2016). Nikolay Ivanovich Lobachevsky (1792-1856), János Bolyai (1802-1860) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855) foram alguns dos matemáticos que compreenderam isso e propuseram ideias revolucionárias que levaram à criação das geometrias não euclidianas.

Lobachevsky, que ocupou o cargo de reitor na Universidade de Kazan, estava convencido, por volta de 1820, da viabilidade de uma nova geometria sem a necessidade de considerar o quinto postulado. Foi ele o pioneiro na publicação sobre geometrias não euclidianas no ano de 1829, que teve como título "Sobre os princípios da geometria". Nesse trabalho, ele propôs uma alternativa ao quinto postulado de Euclides através de sua negação, sem tentar demonstrá-lo, dando origem ao que ele chamou de geometria imaginária (GREENBERG, 1994).

Diferentemente de Saccheri, ele notou a possibilidade de um triângulo cuja soma dos ângulos internos fosse inferior a 180°. Quando essa soma alcançava exatamente 180°, referia-se à geometria convencional, e quando era menor que 180°, correspondia à geometria imaginária. Apesar dessas propostas inovadoras, Lobachevsky enfrentou diversas adversidades ao divulgar suas criações.

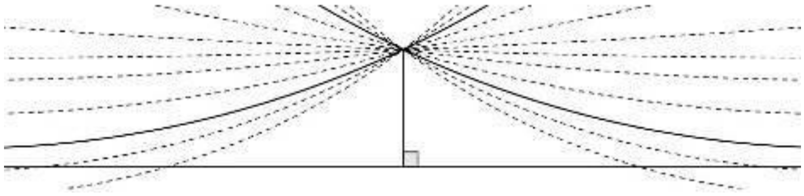
Em 1832, submeteu seu artigo à análise dos membros da Academia de Petersburgo, os quais rejeitaram suas ideias e declararam que o artigo não merecia atenção. Em 1834, periódicos literários de Petersburgo veicularam textos depreciativos sobre o trabalho de Lobachevsky, enfatizando que suas propostas eram falsas (SACHS, 2016). Além disso, devido à publicação em russo, sua obra não recebeu grande reconhecimento naquela época, já que os principais centros de pesquisa matemática estavam no ocidente (RIBEIRO, 2012).

Ele persistiu com sua investigação e produziu vários trabalhos sobre geometria imaginária. Mas foi um texto em alemão, chamado "Pesquisas geométricas sobre a teoria das retas paralelas", que deu maior visibilidade ao seu trabalho (EVES, 2004). Ademais, em 1855, publicou "Pangeometria" em que sugeriu uma geometria universal que englobava a geometria euclidiana plana como um caso especial. Nele Lobachevsky também propôs que o quinto postulado fosse substituído por uma proposição alternativa: "Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas distintas que não se intersectam com a reta dada" (BONOLA, 1955), posteriormente reconhecido como o axioma hiperbólico. Com base nestas ideias, Lobachevsky (2010, p. 26, tradução nossa) definiu retas paralelas como:

> Dada uma reta e um ponto no plano, eu chamo de reta paralela à reta dada, que passa pelo ponto dado, uma reta que passa por este ponto e que é o limite entre as linhas que estão no mesmo plano, que passam através do mesmo ponto e que, quando prolongada a um dos lados da perpendicular que liga o ponto a reta dada, interceptam esta reta e aquelas que não interceptam.

Tal definição está representada na Figura 3:

Figura 3 - Retas paralelas na proposta de Lobachevsky



Fonte: Ribeiro (2012, p. 51)

János Bolyai, oficial do exército húngaro, foi influenciado por seu pai, Farkas Bolyai, um renomado matemático e professor universitário. Farkas dedicou parte de sua vida aos estudos sobre o postulado das paralelas e expressou preocupação quando percebeu que seu filho estava seguindo o mesmo caminho. Em 1820, escreveu-lhe uma carta incentivando-o a abandonar esse estudo e explorar outras áreas do conhecimento (KATZ, 2011). Apesar disso, Bolyai persistiu e, segundo Eves (2004, p. 542), acabou encontrando uma harmonia no quinto postulado de Euclides, inspirando-o a várias criações.

Em 1823, escreveu a seu pai descrevendo que havia concebido "um universo novo e estranho". Impressionado, Farkas incentivou-o a publicar suas ideias como apêndice de seu próprio livro, comparando a disseminação de novas ideias à floração das violetas na primavera (KATZ, 2011). Assim, no ano de 1832, Bolyai publicou a obra "Apêndice contendo a verdade científica do espaço, independente do IX axioma de Euclides", com 26 páginas, como parte do livro "Tentamen" de seu pai. Nesse texto, Bolyai apresentou um sistema geométrico que desafiava o postulado das paralelas de Euclides e considerava não só a geometria euclidiana, mas abria espaço para outras geometrias (SACHS, 2016).

Farkas tinha uma amizade próxima com Carl Friedrich Gauss, e empolgado com as realizações de János, enviou uma cópia de seu apêndice a Gauss sem o consentimento deste. No entanto, na resposta, Gauss enfatizou que não poderia elogiar o trabalho, pois isso seria como elogiar a si mesmo. Ele observou que o método e os resultados propostos por János eram quase idênticos aos de suas próprias reflexões. Essa correspondência revelou que, há 35 anos, Gauss estava imerso no problema do quinto postulado e acreditava na viabilidade de uma nova geometria pela sua negação (GREENBERG, 2001).

Desiludido com a resposta de Gauss, János Bolyai optou por não divulgar mais suas pesquisas, mas descobrindo em 1848 que Lobachevsky havia publicado resultados semelhantes aos seus, sentiu-se motivado a continuar divulgando suas criações. Ele tentou produzir uma grande obra sobre o tema, mas ela nunca foi concluída (GREENBERG, 2001). Segundo Ribeiro (2012, p. 55), os principais resultados apresentados por Bolyai em seus estudos foram:

> 1. A própria definição de retas paralelas e suas consequências imediatas; 2. As ideias de círculo e a esfera com raios infinitos; 3. A trigonometria esférica é independente do quinto postulado; 4. A utilização da trigonometria para o cálculo de áreas e volumes na geometria hiperbólica; 5. A impossibilidade da quadratura do círculo na geometria euclidiana.

As contribuições de Lobachevsky e Bolyai estão intrinsecamente ligadas à geometria hiperbólica. Esse termo foi cunhado posteriormente pelo matemático Felix Klein em 1871, seguindo a etimologia da palavra "hipérbole", que está associada ao excesso. Remetendo à ideia de que, nesta geometria, o número de retas paralelas a uma reta dada que passa por um ponto é maior que um (TRUDEAU, 1987, p. 159). Embora ambos abordassem a mesma geometria, suas perspectivas eram diferentes. Bolyai destacava a independência do quinto postulado em relação à geometria euclidiana, desenvolvendo propriedades válidas fora desse contexto. Por outro lado, Lobachevsky focava na criação de uma nova geometria fundamentada na negação do quinto postulado (RIBEIRO, 2012).

Ao contrário destes matemáticos, Gauss compartilhou pouco sobre suas incursões nas geometrias não euclidianas. Segundo Greenberg (2001), isso se deve ao receio de Gauss com a reação da comunidade matemática da época, que era fortemente influenciada pela filosofia de Kant, e considerava a geometria euclidiana como a única verdade absoluta. Embora reconhecesse a falha dessa concepção, Gauss optou pelo silêncio para evitar conflitos com os filósofos e matemáticos contemporâneos.

O conhecimento das contribuições de Gauss para essa "nova geometria" vem de seus próprios registros pessoais, como livros de anotações, correspondências e notas de pesquisa inéditas. De acordo com Bonola (1955), Gauss vislumbrou essa nova geometria desde 1792, aos 15 anos de idade, ao perceber que a negação do postulado das paralelas não gerava contradições com os axiomas fundamentais da geometria euclidiana. Em uma carta datada de 1817, enviada a seu amigo Heinrich Wilhelm, ele expressou sua convicção de que o quinto postulado não poderia ser provado (ROSENFELD, 1988). Em 1824, ele teria escrito a Franz Taurinus, descrevendo essa geometria. Nesta carta ele afirmou que todos os seus esforços para encontrar uma contradição ou uma inconsistência nesta nova geometria haviam sido em vão.

Silva (2006) destaca que em 1827, Gauss apresentou à Sociedade Real de Göttingen o trabalho "Disquisitiones generales circa superficies curvas", onde introduziu a geometria diferencial em superfícies curvas arbitrárias. Neste trabalho, Gauss abordou a curvatura de uma superfície de forma distinta do que era conhecido desde Euler. Esses estudos sobre a curvatura das superfícies constituíram a base para o subsequente desenvolvimento de várias investigações sobre geometrias não euclidianas, incluindo as de Riemann, que possibilitaram a formulação da geometria elíptica ou geometria riemanniana.

Portanto, durante a primeira metade do século XIX, consolidou-se a convicção em duas ideias: primeiro, não é possível provar o quinto postulado sem admitir outro postulado equivalente a ele; segundo, é possível construir geometrias sem a preservação do quinto postulado (CHABERT, 1997).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo buscou explorar a fascinante jornada das geometrias não euclidianas, revelando não apenas avanços matemáticos notáveis, mas também a intrincada relação entre teoria e prática, entre a mente humana e as abstrações. Seguindo a visão de Imre Toth (2011), destacamos a revolução possibilitada pelo simples ato de negação. Partindo da análise de "Os Elementos" de Euclides, compreendemos a relevância crucial do quinto postulado e as várias tentativas de sua prova ao longo do tempo. Este postulado, aparentemente simples, foi ponto de conflito e inspiração para muitos matemáticos, incluindo Lobachevsky, Bolyai e Gauss, cujas contribuições visionárias abriram novos horizontes para a matemática, dando origem às geometrias não euclidianas.

Ao analisar estes feitos, percebemos como suas abordagens desafiaram as noções estabelecidas de espaço e suas propriedades. As geometrias não euclidianas ampliaram nosso entendimento do universo matemático e influenciaram outras disciplinas, como a física e a cosmologia. Em última análise, este estudo ressalta a riqueza e a diversidade do pensamento matemático, e a capacidade humana de transcender limites aparentemente intransponíveis. Assim, convidamos o leitor a refletir sobre não apenas as contribuições desses grandes matemáticos, mas também sobre o impacto mais amplo de suas descobertas na forma como percebemos e concebemos o mundo ao nosso redor, inspirando novas investigações e desafiando as mentes curiosas a explorar ainda mais os limites do conhecimento matemático.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria euclidiana plana**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1995.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria hiperbólica**. Goiânia: Instituto de Matemática e Estatística da UFG, 2002.

BICUDO, Irineu. Peri apoidexeos/de demonstratione. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo Carvalho (Org.). **Educação matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 58-76.

BONOLA, Roberto. **Non educlidean geometry:** a critical and historical study of its development. Nova Iorque: Dover Publications, 1955.

BRITO, Arlete de Jesus. **Geometrias não euclidianas:** um estudo histórico pedagógico. 1995. 187 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 1995.

CHABERT, Jean-Luc. Proving the Fifth Postulate: true or false? In: The Inter-IREM commission. **History of mathematics, histories of problems**. Paris: Ellipses, 1997. p. 285-305.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

GREENBERG, Marvin Jay. **Euclidean and non-euclidean geometries:** development and history. 3. ed. Nova Iorque: Freeman, 1994.

KATZ, Victor Joseph. **A história da matemática:** uma introdução. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2011.

KLEIN, Felix. **Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint:** arithmetic, algebra, analysis. Nova Iorque: Dover Publications, 2004.

KOYRÉ, Alexandre. **Études d'histoire de la pensée scientifique**. Paris: Editions Gallimard, 1973.

LOBACHEVSK, Nikolai Ivanovich. **Pangeometry.** Tradução de Athanase Papadopoulos. Zürich: European Mathematical Society, 2010.

NASCIMENTO, Anna Karla Silva do. **Geometrias não euclidianas como anomalias:** implicações para o ensino de geometria e medidas. 2013. 115 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

NOBRE, Sergio Robertp. Introdução à história da matemática: das origens do século XVIII. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Rio Claro, v. 2, n. 3, p. 3-43, abr. 2002.

NOBRE, Sergio Roberto. **Introdução histórica às geometrias não euclidianas**: uma proposta pedagógica. Belém: SBHMat, 2009.

RIBEIRO, Renato Douglas Gomes Lorenzetto. **O ensino das geometrias não euclidianas:** um olhar sob a perspectiva da divulgação científica. 2012. 102 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade São Paulo, São Paulo. 2012.

ROSENFELD, Boris Abramovich. **A history of non-Euclidean geometry:** evolution of the concept of a geometric space. Traduzido de Abe Shenitzer. New York: Springer-Verlag, 1988.

SACHS, Línlya. **O quinto postulado de Euclides como história de problemas**. HIPÁTIA-Revista Brasileira de História, Educação e Matemática, v. 1, n. 1, p. 11-29, 2016.

SILVA, Ana Paula Bispo da. **O desenvolvimento das mecânicas não-euclidianas durante o século XIX.** 2006. 131 p. Tese (Doutorado). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.

TOTH, Imre. A revolução não euclidiana. **Caderno de Física da UEFS**, n. 9, p. 37-52, 2011.

TRUDEAU, Richad J. **The non-euclidean revolution**. Boston: Birkhäuser, 1987.

Submetido em: 11 de abril de 2024.
Aprovado em: 5 de maio de 2024.