

## HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO METODOLÓGICO: SOBRE A COMPREENSÃO DO VOLUME DA ESFERA COM ARQUIMEDES

Daniel Felipe Neves Martins<sup>1</sup>

Diego Tranjan Viug<sup>2</sup>

Raphael Martins Gomes<sup>3</sup>

### RESUMO

Este trabalho é um recorte de uma pesquisa em andamento que tem como objetivo construir junto aos alunos do ensino médio o fato de que o volume da esfera depende única e exclusivamente da medida do seu raio, usando a História da Matemática como um recurso metodológico. Tendo em vista que a formalização deste resultado é pouco explorada pelos professores da educação básica, as contribuições de Arquimedes são levadas para a sala de aula com o intuito de facilitar o ensino e a aprendizagem deste tópico. Acreditamos que a metodologia escolhida permite aumentar o capital cultural e matemático dos alunos e dos professores, além de apontar para outras relações envolvendo diferentes conteúdos Matemáticos diferentes da geometria.

**Palavras-chave:** Volumes. Esfera. Geometria Espacial. História da Matemática no Ensino

### INTRODUÇÃO

Este artigo é resultado de atividades realizadas durante as aulas de Matemática com vinte e seis alunos de uma turma do 2º ano do ensino médio de um colégio público federal localizado na cidade do Rio de Janeiro.

As atividades desenvolvidas em classe procuraram responder um questionamento posto por três alunos durante uma aula do curso de geometria espacial: **“Professor por que o volume**

**da esfera é  $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ , se a esfera não tem vértice como o cone e a pirâmide?”**

Num primeiro momento, a curiosidade a ser esclarecida não fazia muito sentido, porém, segundos depois, ficou claro que os alunos haviam associado o denominador 3 da fórmula contida na pergunta, ao denominador 3 que aparece tanto na fórmula que determina do volume da pirâmide quanto na fórmula que calcula o volume do cone.

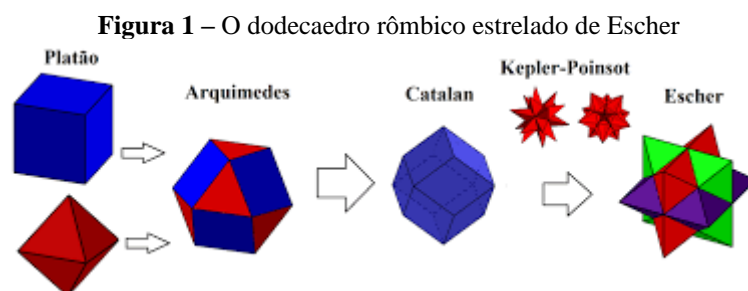
Sendo questionados em relação à dúvida apresentada, pois ainda estavam estudando cones e não esfera, os alunos afirmaram que tomaram conhecimento da fórmula, através de uma plataforma de compartilhamento de vídeos muito utilizada por eles.

<sup>1</sup> Colégio Pedro II, (CP II, CSC3, Rio de Janeiro), Doutor em História das Ciências pela UFRJ, Pós-doutorando em História da Matemática pelo PEMAT-UFRJ. Email: [dfnmartins@gmail.com](mailto:dfnmartins@gmail.com)

<sup>2</sup> Colégio Pedro II, (CP II, CR2, Rio de Janeiro), Mestre em Matemática pela UERJ. Email: [diego.viug.1@cp2.edu.br](mailto:diego.viug.1@cp2.edu.br)

<sup>3</sup> Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, (PUC-Rio), PROFEX, Mestrando em Educação pela PUC-RJ. Email: [raphaelmartins@aluno.puc-rio.br](mailto:raphaelmartins@aluno.puc-rio.br)

A dúvida, acompanhada de suas argumentações, fazia sentido já que tais alunos ‘aprenderam’ numa das videoaulas assistidas, e de maior acesso pelos usuários, que: “se o sólido tem ponta (como pirâmides e cones), o resultado do produto entre a área da base e a altura, deveria ser dividido por três”, fala de um dos professores. Num contexto mais geral, esta alternativa não é verdadeira e um bom contraexemplo são os processos de obtenção do volume de poliedros estrelados, como o dodecaedro rômico estrelado. Este poliedro, também conhecido por Sólido de Escher<sup>4</sup>, tem pontas e o cálculo do seu volume não acompanha este mesmo padrão de raciocínio, como mostram Silva, Saito e Mattos (2019, p. 47).



**Fonte:** Silvia, Saito e Mattos (2019, p. 47)

A seguir, os alunos perguntaram se algum sólido “com ponta” tinha como volume  $4\pi R^3$ , o que deixou mais claro a analogia que estavam fazendo entre o cálculo do volume da esfera e o volume de outros sólidos estudados.

Apesar dos alunos terem sido apresentados ao Princípio de Cavalieri, aos cálculos simples envolvendo figuras geométricas semelhantes e aos recursos digitais que justificam as fórmulas que calculam o volume de uma pirâmide qualquer e de um cone reto de base circular, o que retiveram mentalmente foi a forte afirmação deixada pelo professor na videoaula.

Mas, será que pirâmides e cones têm alguma relação com o cálculo do volume da esfera? O cone sim, quando associado ao conceito de anticlépsidra, a pirâmide, não necessariamente.

Os questionamentos feitos pelos alunos careciam de respostas, e foram o motivadores para que se buscasse alternativas não tradicionais que justificassem o denominador 3 na fórmula do volume da esfera. Em geral, os professores de Ensino Médio a informam e em seguida, partem para a resolução de inúmeros exercícios.

Há também aqueles professores que afirmam que a justificativa formal para a existência da expressão do volume da esfera está nos cursos de graduação, na disciplina Cálculo I, e por

<sup>4</sup> O Sólido de Escher (1898-1972) é um sólido resultante de uma técnica utilizada por Johannes Kepler (1571-1630) e Louis Poinsot (1777-1859) conhecida por estrelação do dodecaedro rômico de Eugène Catalan (1814-1884), que é o dual do cuboctaedro (Sólido de Arquimedes) que, por sua vez, é construído a partir do truncamento de um hexaedro ou de um octaedro, ambos regulares.

isso, os alunos devem aceitar o resultado, impedindo que discussões ricas no campo do pensamento geométrico e lógico mais amplos sejam levados para a Educação Básica.

Por conta desses cenários comuns em salas de aula presenciais ou virtuais é que a opção foi construir com os alunos uma sequência lógica de raciocínio através da qual pudéssemos encontrar a fórmula do volume da esfera, compreendendo por que este volume depende somente da medida do raio.

O que se tinha como desafio era responder uma pergunta trazida por adolescentes interessados em saber o porquê de um resultado, usando uma metodologia mais interessante, uma vez que o argumento matemático trazido no manual didático do aluno era extremamente formal e exatamente o mesmo apresentado em livros-textos dos anos 1960.

O uso da História da Matemática como o recurso metodológico, combinado com recursos didáticos e tecnologias, teve a intenção de criar conexões entre o tema e outras áreas do conhecimento escolar já vivenciadas pelos alunos. Chaquiam (2023, p. 11) destaca

(...) que a história da matemática, combinada com outros recursos didáticos e metodológicos, pode contribuir para a melhoria da aprendizagem da Matemática e emerge como uma possibilidade de buscar uma nova forma de ver e entender a Matemática, ou seja, tornando-a mais contextualizada, mais integrada com as outras áreas, mais agradável, mais criativa e mais humanizada.

A partir desta afirmativa é que se constrói um percurso didático por onde a figura de Arquimedes e seus trabalhos em geometria perpassam contribuindo significativamente para a solução da questão. O que era uma simples dúvida vira um projeto de classe para o trimestre letivo, os alunos envolveram-se plenamente e foram efetivamente os construtores do conhecimento.

As considerações finais fecham o artigo trazendo uma análise pautada na oralidade, isto é, nas considerações trazidas pelos sujeitos que participaram da pesquisa e na possibilidade de analisar a aquisição de novos conhecimentos tanto pelos alunos quanto pelos professores.

## **METODOLOGIA**

O que caracteriza o artigo é uma combinação entre o uso da História da Matemática nas aulas de matemática e o uso de tecnologias como facilitadores da aprendizagem. Esta escolha se deu devido a maneira de como os dados seriam colhidos, organizados, analisados e como a prática curricular seria desenvolvida.

Na prática, a turma foi dividida em cinco grupos: quatro grupos com cinco alunos em cada e um grupo com seis alunos. A primeira atividade foi a mesma para cada grupo: buscar duas videoaulas na plataforma citada anteriormente pelos alunos que trouxeram a questão

motivadora desta pesquisa e preencher uma ficha de informações sobre elas. A ficha deveria ser resultado de uma construção coletiva e gerar dados para futuras discussões. As dez videoaulas deveriam ser distintas e como a amostra seria pequena para afirmarmos com precisão o valor pedagógico do material assistido, foi pedido que os alunos analisassem materiais com um número expressivo de visualizações e de comentários por assinantes da plataforma.

O grupo 1 assistiu vídeos com 1.037 e 23.750 visualizações, o grupo 2 vídeos com 45.593 e 40.212 visualizações, o grupo 3 vídeos com 17.650 e 366.000 visualizações, o grupo 4 analisou vídeos com 173.000 e 180.000 visualizações e o grupo 5 assistiu vídeos com 63.920 e 128.000 visualizações.

**Figura 2** – Material para análise das videoaulas – Frente

ANÁLISE CRÍTICA DA VIDEO AULA		
NÚMERO DO GRUPO	NOME DO CANAL	TÍTULO DO VÍDEO
TEMPO DE VEICULAÇÃO	NÚMERO DE VISUALIZAÇÕES	TEMPO TOTAL DO VÍDEO
NÚMERO DE INSCRITOS NO CANAL	QUANTIDADE DE LIKES	DESLIKES

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

Em seguida, no verso da ficha, cada grupo produziu um texto com a contribuição de todos os seus membros e escolheu um representante para ler a resenha crítica do material analisado para a turma. Esta atividade serviu como coleta de dados para a pesquisa em curso e permitiu caracterizar esta parte da pesquisa, como qualitativa descritiva, exploratória e com uso de fontes de evidências digitais de domínio público, disponibilizadas na rede mundial de computadores.

As informações contidas nas fichas produzidas pelos alunos serviram de ferramentas que auxiliaram os pesquisadores na compreensão de como os professores dinamizaram o conteúdo nas videoaulas. É importante pontuar que as análises feitas pelos grupos de alunos provavelmente serão distintas daquelas feitas pelos pesquisadores porque seus objetivos com a interpretação das videoaulas são de naturezas diferentes.

Os pequenos textos produzidos pelos alunos também serviram como exercício de criticidade, por ser necessário: descrever se alguma videoaula trazia a dedução matemática do volume da esfera, se explicou porque o volume da esfera é dado em função do seu raio e se havia alguma discussão acerca do tema durante o decorrer da aula.

Como estas pesquisas não responderam ao questionamento inicial dos alunos, a Contação de Histórias foi entendida como uma possível ferramenta através da qual a História

da Matemática pudesse dar conta de mostrar aos alunos as produções científicas de Arquimedes (287aeC - 212 deC), assim como apresentá-lo como matemático, físico, engenheiro, astrônomo, inventor e filósofo grego da antiguidade. Os alunos conheceram o seu **método mecânico** e souberam como o matemático resolvera a questão.

A Contação de Histórias é muito empregada com crianças do pré-escolar e do Ensino Fundamental I, já que uma das características principais do contador de histórias é saber conduzir de forma clara o enredo, a fim de despertar a curiosidade do ouvinte. Segundo Chaquiam (2023, p.33) o personagem emerge para compor o contexto epistemológico, científico e técnico, além de contribuir para a constituição/evolução da temática a ser estudada.

O professor que desempenha o papel de contador de histórias nas aulas de matemática é aquele que propõe perguntas interessantes sobre as personagens envolvidas na narrativa, facilita a fixação de conteúdos, facilita a aprendizagem propondo conexões com outros fatos históricos de conhecimento do grupo obtido em outras disciplinas e explora da melhor maneira possível o cenário que emoldura o que se conta.

O exercício da oralidade é dramatizado pelo ‘contador’ junto aos alunos afim de trazê-los para o cenário histórico estudado e o uso de iconografia, músicas, coleta de dados de outras fontes como artes e literatura e escritos diversos, auxiliam não somente na análise dos dados coletados, como na possibilidade de perceber a mudança postural do aluno frente à matemática em diversos sentidos.

Na roda de conversa estabelecida com a turma foi explorado o aprimoramento do método da exaustão de Eudoxo de Cnido (408aeC - 355aeC) por Arquimedes e os diversos resultados oriundos do seu método mecânico. As semelhanças destes dois métodos com o Princípio de Cavalieri podem ser encaradas como vestígios da origem do Cálculo Integral. A análise do manuscrito de Arquimedes intitulado **Sobre a Esfera e o Cilindro**, publicado em 1298 pelo astrônomo iraniano Nasir al\_Din al-Tusi (1201 – 1274), vai ao encontro deste pensamento. Dante e Viana (2020, p. 127) afirmam que

Conhecemos grande parte dos trabalhos de Arquimedes graças às traduções feitas do grego para o árabe e para o persa. (...) No século XIII (...) Nasir al Din al-Tursi publica as versões revistas de textos gregos, incluindo a do livro de Arquimedes Sobre a Esfera e o Cilindro, que em árabe teve o título Tahrir Kitab al-kura wa 'l-ustuwana li-Archimidis.

Arquimedes procurava resolver problemas matemáticos usando resultados já comprovados. Para determinar o volume da esfera, trabalhou com as expressões analíticas que determinam o volume do cone e do cilindro circular reto. Após as explanações aos alunos de como Arquimedes realizou suas experiências, estes tiveram coo tarefa individual, completar o

raciocínio de Arquimedes, mostrar suas soluções à turma, testam seus resultados com uma calculadora e esboçar pequenas conclusões.

Este resultado levou os estudantes ao encontro do conceito de função e ao uso das tecnologias digitais, permitindo estabelecer conexões entre temas diversos dentro da própria Matemática explorados na pesquisa e não nestas linhas .

## CONTEXTO HISTÓRICO

Simmons (1987) nos conta que Arquimedes foi muito conhecido em todo o mundo grego de sua época, tornando-se uma figura lendária por conta de suas descobertas matemáticas e suas invenções. Porém, conhece-se pouco em relação a verdadeira autoria dos feitos atribuídos a ele. O que há são registros que atravessaram os séculos, contidos em textos romanos, gregos, bizantinos e árabes.

Há muitas histórias que ilustram a figura de Arquimedes e seus experimentos, sendo a mais conhecida, aquela que o permitiu calcular a massa da coroa do rei Herón. Este resultado contribuiu para o desenvolvimento da Ciência da Hidrostática e para a construção de um artefato que conhecemos por parafuso (ou bomba) de Arquimedes. Esta máquina permite a transferência de líquidos de um local mais baixo até um ponto mais elevado.

As obras **Sobre Corpos Flutuantes** e **Sobre o Equilíbrio dos Planos** apresentam o princípio fundamental da hidrostática e um estudo que relaciona equilíbrio e alavancas, conceituando gravidade e calculando o centro de gravidade de muitas figuras planas e espaciais.

Podemos, para efeitos didáticos, organizar as produções matemáticas de Arquimedes mais notáveis em seis grandes grupos : (1) um tratado com vinte e quatro proposições sobre a quadratura da parábola, (2) vinte e oito proposições sobre espirais, (3) três proposições onde é possível encontrar a demonstração, de forma rigorosa, que a área do círculo vale  $A = \pi R^2$  , (4) um estudo sobre conóides e esferóides, (5) quinze proposições que explicam o seu método de fazer descobertas em geometria e (6) o mais profundo dos tratados, **Sobre a esfera e o cilindro**. Este livro contém uma prova longa e rigorosa do volume da esfera e da área da superfície de uma esfera, nas proposições 33 e 34. O livro é constituído por dois volumes, com 60 proposições ao todo.

Simmons (1993) conta que Arquimedes provou a fórmula do volume da esfera de maneira criativa. No entanto, a prova era de difícil compreensão. O resultado de Demócrito de Abdera (460 aeC – 370 aeC) que diz que “dado um cone e um cilindro com mesmas altura e base, o cilindro possui volume três vezes maior que o volume do cone” foi usado por Arquimedes para justificar sua demonstração. Quase nada se conhece sobre o trabalho de

Demócrito, mas acredita-se que ele tenha chegado a este resultado partido de uma pirâmide de base quadrangular, passando para uma pentagonal, para uma pirâmide de base hexagonal, até chegar numa pirâmide de base arbitrária, tendo o cone como limite das pirâmides inscritas, sendo assim uma possível aplicação do método da exaustão.

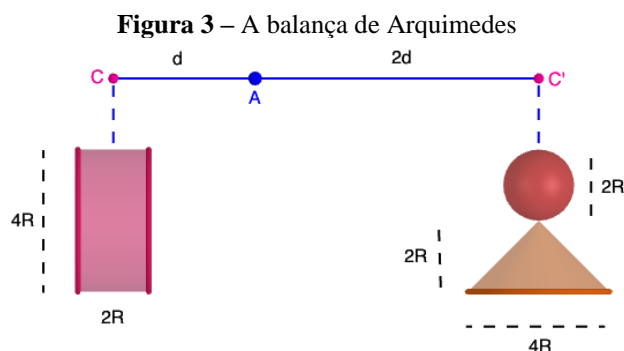
## O QUE FOI CONTADO AOS ALUNOS?

No tratado intitulado **Sobre a esfera e o cilindro**, Arquimedes apresenta em dois volumes, métodos que permitem calcular as medidas da área e do volume de alguns corpos redondos. Um desses métodos é o método do equilíbrio, que Arquimedes demonstra por meio do método da exaustão.

Na obra **Sobre o Equilíbrio dos Planos** Arquimedes apresenta uma dedução teórica do que hoje é conhecido por Lei da Alavanca. Esta lei tem por base o conceito de centro de gravidade de um corpo: “Dois pesos  $p_1$  e  $p_2$  nas extremidades de uma barra de peso desprezível e distantes respectivamente  $d_1$  e  $d_2$  de um ponto de apoio estão em equilíbrio se  $p_1d_1 = p_2d_2$ ”.

Um outro resultado importante obtido por Arquimedes nas suas experimentações diz que “se grandezas se equilibram a certas distâncias, então grandezas equivalentes a estas grandezas, estarão em equilíbrio, por sua vez, nas mesmas distâncias”. E se duas grandezas iguais não possuem o mesmo centro de gravidade? Neste caso o centro de gravidade da grandeza composta por estas duas estará no ponto médio do segmento de reta ligando os centros de gravidade das duas grandezas. Arquimedes também faz menção a grandezas comensuráveis e incomensuráveis, afirmando que elas se equilibram em razões inversamente proporcionais às grandezas.

Ao fazer inúmeros experimentos com os corpos de revolução, Arquimedes consegue concluir que uma **esfera** cujo comprimento do raio mede  $R$  e um **cone** com as medidas dos comprimentos do raio e da altura são iguais a  $2R$  estão em equilíbrio, através de uma balança, com um **cilindro** cujas medidas do comprimento do raio e da altura são iguais a  $2R$ . Para que este equilíbrio aconteça, Arquimedes adverte que a medida do comprimento do braço da balança referente ao cone e a esfera seja o dobro da medida do comprimento do braço da balança referente ao cilindro.



Fonte: Elaborada pelos Autores.

**INFORMAÇÃO I:** Ao observar a balança em equilíbrio e o fato de  $C'A = 2 \cdot AC$ , pode-se concluir que duas vezes a medida da massa da esfera acrescida da massa do cone equivale a uma vez a medida da massa do cilindro.

**INFORMAÇÃO II:** Arquimedes sabia como calcular a medida do volume de um cilindro circular reto e que a medida do volume do cone é a terça parte do produto da medida da área da base pela medida do comprimento da altura.

**INFORMAÇÃO III:** As condições e as relações existentes na Lei da Alavanca.

De posse dessas três informações e da imagem da figura 3, foi pedido aos grupos que determinassem a expressão que calcula o volume de uma esfera de raio  $R$ , a partir da equivalência entre os volumes.

Dos seis grupos, dois (2 e 6) chegaram à expressão sem maiores problemas, um grupo (5) teve problemas com a interpretação do texto necessitando de uma leitura junto ao professor, dois grupos (3 e 4) erraram cálculos por conta do aparecimento de frações e um grupo (1) errou a modelagem inicial do problema, ao escrever que o dobro do valor da massa da esfera acrescido do valor da massa do cone é igual ao valor da massa do cilindro.

Chamando de  $V_e$  o volume da esfera,  $V_{co}$  o volume do cone e  $V_{ci}$  o volume do cilindro, o experimento de Arquimedes nos permite escrever:  $2 \cdot (V_e + V_{co}) = V_{ci}$ . A partir de uma manipulação algébrica simples e da substituição de duas expressões já conhecidas, o volume do cone e o volume do cilindro, conclui-se que  $V_e = \frac{4\pi R^3}{3}$ . Este volume depende única e exclusivamente da medida do raio da esfera.

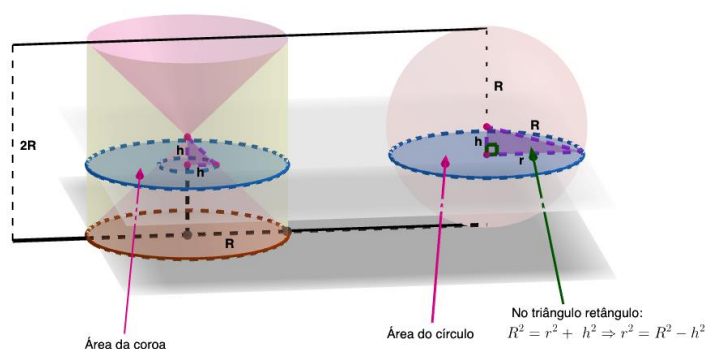


## EM GERAL, COMO SE DÁ A FORMALIZAÇÃO DO CÁLCULO DA MEDIDA DO VOLUME DA ESFERA NOS LIVROS DIDÁTICOS?

Grosso modo a resposta é: a partir do cilindro equilátero cuja medida do raio da base é  $R$  e medida da altura  $2R$  e de um cone de duas folhas.

Tecnicamente, do cilindro é retirado dois cones cujas bases coincidem com as bases do cilindro e cujos vértices são comuns e pertencentes ao ponto médio da altura do cilindro. As medidas das alturas dos cones são  $R$ , como mostra a figura 4. Após as retiradas dos cones do interior do cilindro, o sólido será representado por  $G$ .

**Figura 4** – Cilindro e Esfera e o Princípio de Cavalieri



**Fonte:** Elaborada pelos autores.

Esta secção intercepta a esfera a uma distância  $h$  de seu centro, determinando um círculo de raio  $r$  e área  $\pi r^2 = \pi \cdot (R^2 - h^2)$ . O plano  $\beta$  também intercepta o sólido  $G$  a uma distância  $h$  de  $V$ , determinando uma coroa circular, limitada por duas circunferências (uma de raio  $R$  e outra de raio  $h$ , com  $R > h$ ) como secção, e cuja área é dada por  $\pi \cdot (R^2 - h^2)$ . As áreas das secções na esfera e no sólido  $G$  são iguais e como as alturas são iguais, pelo Princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido  $G$  possuem os mesmos volumes, isto é,  $V_G = V_{\text{cilindro}} - 2 \cdot V_{\text{cone}}$ ,  $V_G = \pi R^2 2R - 2 \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot R$ , que após manipulações algébricas resulta em  $V_G = \frac{4\pi}{3} R^3$

Esta é a construção/argumentação lógico-matemática mais comumente encontrada nos livros didáticos do Ensino Médio das escolas brasileiras. Pode-se observar que a linguagem dos livros didáticos é muito técnica e contribui para a ideia de que matemáticos são criaturas especiais, que tiram suas ideias da cartola e que são seres humanos superdotadas de criatividade e engenhosidade.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa primeira consideração refere-se ao ganho de capital cultural para o aluno e para o professor quando este se dispõe a organizar seu material didático com base na História da

Matemática. Inúmeras digressões interessantes relacionadas à História, Matemática, História da Matemática e Filosofia surgiram no contexto da aula e foram levadas em consideração.

Os alunos se interessam por buscar informações concernentes à História da Matemática em seus manuais escolares e foram capazes de recontar o que aprenderam de maneira nova.

O fato de os alunos perceberem que o volume da esfera é uma **função** que relaciona números reais positivos e não nulos (medidas do raio) a outros números reais positivos não nulos (medida do volume) permitiu estabelecer conexões existentes entre diversos outros tópicos já estudados pelos alunos, como as funções.

Em alguns casos, explorar  $V(R) = \frac{4\pi}{3} R^3$  instiga o professor levar para a sala de aula conteúdos como as **funções inversas** a partir de uma temática vinda da geometria, via História da Matemática. O fato de  $V(R) = \frac{4\pi}{3} R^3$  ( $R > 0$ ) ser bijetora, de  $V^{-1}(R) = R(V) = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$  ( $V > 0$ ) existir, da construção do seu gráfico ser facilmente realizável e por  $V(R)$  fazer parte da família de curvas da função real de variável real do tipo  $f(x) = a \cdot x^3$  (a menos do seu maior domínio de definição) permite, por exemplo, comparar diferentes esferas concêntricas com as representações gráficas de seus volumes, enriquecendo as discussões matemáticas.

A ideia intuitiva de que a função inversa de uma bijeção ‘desfaz o que a função faz’ é muito importante e pode ser explorada a partir das análises de dados de saída ou entrada contidos em tabelas simples feitas no Excel, ampliando o uso das tecnologias digitais, e em termos de estudos geométricos, verificar, que os gráficos de  $V(R)$  e de  $V^{-1}(R)$  são simétricos em relação à reta  $x - y = 0$ .

As conclusões parciais do trabalho, até o momento, têm ido ao encontro das ideias trazidas por pesquisadores que estudam o uso da História da Matemática como metodologia e tendência em ensino da Matemática na educação básica.

## REFERÊNCIA

- CHAQUIAM, M. **Histórias e Matemáticas em sala de aula, contextos textos e atividades**. Série História da Matemática no Ensino da Matemática. Vol.2. São Paulo: LF Editorial, 2023.
- DANTE, L. R e VIANA, F. **Matemática em Contextos**. São Paulo: Ática, 1ª Edição, 2020.
- SILVA, E. M. da, SAITO, O. H., & MATTOS, S. G. de. Determinando o volume do Sólido de Escher (dodecaedro rômico estrelado) por meio do GeoGebra. **Revista Do Instituto GeoGebra Internacional De São Paulo**, 8(2), 044–061, 2019.
- SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica**. New York: Pearson, 1ª Edição, 1993.