RHMP
REVISTA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

ISSN: 2317-9546 ***e*-ISSN**: 2675-715X

A DIVISÃO DE POLINÔMIOS POR AL-SAMAW'AL

Severino Carlos Gomes[1]

RESUMO

Como parte de amplo projeto explorando episódios da História da Matemática para uso didático-pedagógico, o presente trabalho tem como objetivo apresentar o dispositivo de Abu Nasr al-Samaw'al para divisão de polinômios, além de tecer recomendações para sua utilização em aulas de Matemática interligando saberes computacionais. Em particular, com o intuito de fomentar a aprendizagem de temas da Matemática em nível básico, o episódio histórico escolhido perpassa pela consolidação dos estudos dos polinômios durante o Império Islâmico Medieval, fato primordial para o surgimento e a consolidação de trabalhos sobre equações algébricas para a solução de problemas de observações astronômicas, de medição de terras, de partilha de heranças, dentre outros problemas práticos da sociedade da época.
Palavras-chave: Álgebra Árabe Medieval. Atividades Para Sala de Aula. Fatoração.

INTRODUÇÃO

É inquestionável desenvolvimento do pensamento algébrico durante o império islâmico medieval. Já no século X, apesar de ainda se usar uma linguagem algébrica retórica (por exemplo, al-Khwarizmi denominava a equação $n + x^2 = mx$ por *números* e *māl igual a raízes (ou coisas)*, em transliteração), diversos estudiosos árabes da época dominavam técnicas algébricas (ou de pensamento algébrico) para resolver problemas do comércio, de partilha de heranças e de medição de terras.

Expoentes como al-Khwarizmi (780-850), Thabit ibn Qurra (836-901), Abu Kamil (850-930), al-Karaji (953-1029), Omar Khayyam (1048-1131) e al-Kashi (1380-1429) se destacaram com importantes contribuições no campo algébrico. Para este trabalho ressaltamos um episódio histórico da álgebra árabe medieval com a divisão de polinômios e o método apresentado por Abu Nasr al-Samaw'al.

Nesse contexto, o presente trabalho tem como objetivo apresentar o dispositivo para divisão de polinômios utilizado por al-Samaw'al para incentivar a aprendizagem matemática em sala de aula através do estudo de episódios históricos potencialmente ricos pedagogicamente.

Assim, esse texto se apresenta, além dessa breve introdução, com uma síntese contextual da época em que viveu al-Samaw'al seguindo de exemplificação passo a passo do seu

[1] Docente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte. Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). E-mail: severocarlosgomes@gmail.com.

dispositivo para divisão de polinômios e, por fim, considerações sobre possíveis aplicações do estudo em sala de aula.

CONHECENDO AL-SAMAW'AL E CONTEXTUALIZANDO SEUS ESTUDOS

Pouco se sabe sobre a vida de al-Samaw'al[2]. Segundo Berggren (2016), em sua autobiografia, al-Samaw'al relata nascimento (por volta de 1130) em uma família judia de Bagdá se convertendo ao Islã em 1163. Fez estudos dos Elementos de Euclides e dos trabalhos de Abu Kamil e al-Karaji. Tornou-se médico viajante com destaque em estudos em matemática, astronomia e teologia. Ele morreu em Maragha (no norte do Irã) por volta de 1180.

Um passo fundamental para o desenvolvimento dos estudos algébricos de al-Samaw'al foi conhecer os trabalhos de al-Karaji. Berggren (2016) afirma que al-Karaji parece ter sido o primeiro a desenvolver a álgebra de expressões contendo potenciação. Do seu ponto de vista, quantidades desconhecidas, sejam números ou magnitudes geométricas, podem ser "raízes", "lados" ou "coisas" (ambas as correspondendo ao "x" na simbologia algébrica atual), ou podem ser *māl* (x^2), cubo (x^3), *māl māl* (x^4), *māl* cubo (x^5), etc. Al-Karaji chama essas diferentes espécies de quantidades de "ordens".

Com essa terminologia, al-Karaji estabelece regras para se trabalhar com monômios conforme regras aritméticas para somar, subtrair, multiplicar, dividir e extrair raízes quadradas. Rashed (1994, p. 17) referiu-se a esta modelagem da álgebra de polinômios na aritmética posicional como a "aritmetização da álgebra", pois al-Karaji "opera com termos desconhecidos usando todas as ferramentas aritméticas, da mesma forma que o aritmético opera com o conhecido".

Porém, al-Karaji considerou apenas a divisão de um monômio por outro e de um polinômio por um monômio. No entanto, estes resultados permitiram aos seus sucessores (entre eles Abu Nasr al-Samaw'al) estudar, pela primeira vez que sabemos, a divisão de polinômios. Em seu tratado mais famoso *al-Bāhir fi'l-jabr*, que significa *O brilhante em álgebra*[3], al-Samaw'al continua e aperfeiçoa estudos de al-Karaji na extensão do cálculo algébrico abstrato e na organização da exposição algébrica em torno das aplicações sucessivas de diferentes operações aritméticas. (Rashed, 1994)

[2] Para contextualização da época do império islâmico medieval, período em que viveu al-Samaw'al, recomenda-se a leitura de Morey e Pereira (2021) e de Youschkevitch [s. d.].
[3] O tratado em árabe com uma versão traduzida e comentada em língua francesa foi publicada por Rashed (2021).

Revista História da Matemática para Professores, Natal (RN), v. 9, n. 2, p. 01-10, 2023. *e*-ISSN: 2675-715X

CONHECENDO O DISPOSITIVO DE AL-SAMAW'AL

Os algoritmos de divisão polinomial eram conhecidos muito antes do século XIX. Katz (2009) atribui ao matemático árabe medieval al-Samaw'al a invenção da divisão completa de polinômios e o primeiro a usar tabelas para escrever e realizar cálculos com polinômios, permitindo até potências negativas. Na verdade, al-Samaw'al percebeu que poderia lidar com potências de $\frac{1}{x}$ tão facilmente quanto com potências de x.

Em seu trabalho com tabelas para estudo dos polinômios, ainda conforme Katz (2009), as colunas são encabeçadas por letras arábicas que representam os numerais, lendo nos dois sentidos a partir da coluna central denominada 0. Usaremos simplesmente os próprios algarismos arábicos. Cada coluna tem então o nome da potência específica ou do recíproco. Por exemplo, a coluna encabeçada por um 2 à esquerda é chamada de "quadrado", aquela encabeçada por um 5 à esquerda é chamada de "quadrado-cubo", aquela encabeçada por um 3 à direita é chamada de "cubo", e assim por diante. Para simplificar, usaremos apenas potências de x. Na sua explicação inicial das regras para desenvolver seu dispositivo de divisão de polinômios, al-Samaw'al colocou um número específico abaixo do 1 à esquerda, como 2, e depois as várias potências de 2 nas colunas correspondentes (Figura 1).

Figura 1 – Tabela de al-Samaw'al para representação de polinômios

7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1	x^{-1}	x^{-2}	x^{-3}	x^{-4}	x^{-5}	x^{-6}	x^{-7}
128	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$

Fonte: Katz (2009, p. 281)

Passemos então ao dispositivo de divisão de polinômios de al-Samaw'al. Consideremos o dividendo sendo P(x) = $6x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1$ e o divisor D(x) = $2x^2 + x - 3$ em simbologia algébrica atual. Observemos o passo a passo. No Quadro 1 na primeira linha estão as potências de x nas suas respectivas ordens. A segunda linha será reservada para os coeficientes do quociente da divisão. Na terceira linha estão os coeficientes do dividendo P(x). Na terceira linha estão os coeficientes do divisor D(x), porém, eles não ocupam as colunas de suas devidas ordens. Esses coeficientes sempre serão alocados nas primeiras colunas das ordens.

Quadro 1 – Dispositivo de divisão de al-Samaw'al (Passo 1)

Coeficientes\Ordens	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
Quociente					
Dividendo	6	− 1	3	− 1	1
Divisor	2	1	− 3		

Fonte: Farès (2017, p. 103)

O Quadro 2 apresenta efetivamente o início do processo de divisão.

Quadro 2 – Dispositivo de divisão de al-Samaw'al (Passo 2)

Coeficientes\Ordens	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
Quociente			3		
Dividendo	6	− 1	3	− 1	1
Divisor	2	1	− 3		

Fonte: Farès (2017, p. 103)

Observe no Quadro 2 que efetuamos a divisão de $6x^4$ por $2x^2$ tendo como resultante $3x^2$. Ou seja, o coeficiente 3 do quociente ocupa a coluna de sua respectiva ordem.

Quadro 3 – Dispositivo de divisão de al-Samaw'al (Passo 3)

Coeficientes\Ordens	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
Quociente			3		
Dividendo	6	− 1	3	− 1	1
Divisor	2	1	− 3		
Resto parcial - Dividendo		− 4	12	− 1	1

Fonte: Farès (2017, p. 103)

No passo seguinte (Quadro 3), o número 3 do quociente é multiplicado por cada um dos coeficientes do divisor e o resultado subtraído dos coeficientes do dividendo em cada ordem resultando na linha que denominamos Resto parcial - Dividendo. Ou seja, $6 - 3 \cdot 2 = 0$; $-1 - 3 \cdot 1 = -4$; $3 - 3 \cdot (-3) = 12$. Os coeficientes do dividendo que não apareceram nessas operações são repetidos em suas respectivas ordens. Com isso se dá o final da primeira etapa da divisão.

Os passos seguintes seguem um processo recursivo do realizado até o Quadro 3. Reiniciamos então (Quadro 4) reposicionando os coeficientes do divisor.

Quadro 4 – Dispositivo de divisão de al-Samaw'al (Passo 4)

Coeficientes\Ordens	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
Quociente			3		
Dividendo	6	– 1	3	– 1	1
Divisor	2	1	– 3		
Resto parcial - Dividendo		– 4	12	– 1	1
Divisor		2	1	– 3	

Fonte: Farès (2017, p. 103)

No Quadro 5 há a divisão de $-4x^3$ por $2x^2$ tendo como resultante $-2x$. Ou seja, o coeficiente -2 do quociente ocupa a coluna de sua respectiva ordem.

Quadro 5 – Dispositivo de divisão de al-Samaw'al (Passo 5)

Coeficientes\Ordens	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
Quociente			3	– 2	
Dividendo	6	– 1	3	– 1	1
Divisor	2	1	– 3		
Resto parcial - Dividendo		– 4	12	– 1	1
Divisor		2	1	– 3	

Fonte: Farès (2017, p. 103)

No passo seguinte (Quadro 6), o número – 2 do quociente é multiplicado por cada um dos coeficientes do divisor e o resultado subtraído dos coeficientes do atual dividendo em cada ordem, resultando na linha que denominamos Resto parcial – Dividendo. Ou seja, $-4-(-2)\cdot 2=0$; $12-(-2)\cdot 1=14$; $-1-(-2)\cdot(-3)=-7$. O coeficiente do atual dividendo que não constou nessa operação é repetido em sua respectiva ordem. É o final de mais uma etapa da recursividade.

Quadro 6 – Dispositivo de divisão de al-Samaw'al (Passo 6)

Coeficientes\Ordens	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
Quociente			3	– 2	
Dividendo	6	– 1	3	– 1	1
Divisor	2	1	– 3		
Resto parcial - Dividendo		– 4	12	– 1	1
Divisor		2	1	– 3	
Resto parcial - Dividendo			14	– 7	1

Fonte: Farès (2017, p. 103)

No Quadro 7 iniciamos mais uma etapa do processo recursivo da divisão. Há o reposicionamento dos coeficientes do divisor.

Quadro 7 – Dispositivo de divisão de al-Samaw'al (Passo 7)

Coeficientes\Ordens	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
Quociente			3	− 2	
Dividendo	6	− 1	3	− 1	1
Divisor	2	1	− 3		
Resto parcial - Dividendo		− 4	12	− 1	1
Divisor		2	1	− 3	
Resto parcial - Dividendo			14	− 7	1
Divisor			2	1	− 3

Fonte: Farès (2017, p. 103)

No Quadro 8 há a divisão de $14x^2$ por $2x^2$ tendo como resultante 7. Ou seja, o coeficiente 7 do quociente ocupa a coluna de sua respectiva ordem.

Quadro 8 – Dispositivo de divisão de al-Samaw'al (Passo 8)

Coeficientes\Ordens	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
Quociente			3	− 2	7
Dividendo	6	− 1	3	− 1	1
Divisor	2	1	− 3		
Resto parcial - Dividendo		− 4	12	− 1	1
Divisor		2	1	− 3	
Resto parcial - Dividendo			14	− 7	1
Divisor			2	1	− 3

Fonte: Farès (2017, p. 103)

No passo seguinte (Quadro 9), o número 7 do quociente é multiplicado por cada um dos coeficientes do divisor e o resultado subtraído dos coeficientes do atual dividendo em cada ordem resultando na linha que denominamos Resto parcial – Dividendo. Ou seja, $14 - 7 \cdot 2 = 0$; $-7 - 7 \cdot 1 = -14$; $1 - 7 \cdot (-3) = 22$.

Quadro 9 – Dispositivo de divisão de al-Samaw'al (Passo 9)

Coeficientes\Ordens	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
Quociente			3	-2	7
Dividendo	6	-1	3	-1	1
Divisor	2	1	-3		
Resto parcial - Dividendo		-4	12	-1	1
Divisor		2	1	-3	
Resto parcial - Dividendo			14	-7	1
Divisor			2	1	-3
Resto				-14	22

Fonte: Farès (2017, p. 103)

Portanto, o Quadro 9 apresenta o processo completo da divisão de P(x) = $6x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1$ e o divisor D(x) = $2x^2 + x - 3$ tendo como quociente Q(x) = $3x^2 - 2x + 7$ e resto R(x) = $-14x + 22$. Ou seja, $6x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1 \equiv (2x^2 + x - 3)(3x^2 - 2x + 7) - 14x + 22$.

Por fim, para melhor compreensão da divisão de al-Samaw'al, vejamos no Quadro 10 mais um exemplo do dispositivo completo na divisão de T(x) = $20x^6 + 2x^5 + 58x^4 + 75x^3 + 125x^2 + 96x + 94$ por M(x) = $2x^3 + 5x + 5$.

Quadro 10 – Dispositivo de divisão de al-Samaw'al

Coeficientes\Ordens	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
Quociente				10	1	4	10
Dividendo	20	2	58	75	125	96	94
Divisor	2	0	5	5			
Resto parcial - Dividendo		2	8	25	125	96	94
Divisor		2	0	5	5		
Resto parcial - Dividendo			8	20	120	96	94
Divisor			2	0	5	5	
Resto parcial - Dividendo				20	100	76	94
Divisor				2	0	5	5
Resto					100	26	44

Fonte: Berggren (2016, p. 138)

De acordo com o dispositivo apresentado no Quadro 10, a divisão de T(x) por M(x) tem como quociente L(x) = $10x^3 + x^2 + 4x + 10$ e resto N(x) = $100x^2 + 26x + 44$. Ou seja, $20x^6 + 2x^5 + 58x^4 + 75x^3 + 125x^2 + 96x + 94 = (2x^3 + 5x + 5)(10x^3 + x^2 + 4x + 10) + 100x^2 + 26x + 44$.

CONSIDERAÇÕES

Para o desenvolvimento e consolidação da aprendizagem de determinados tópicos matemáticos em particular é necessário compreeender os processos de fatoração de expressões algébricas. Sem dúvidas, nesse aspecto o estudo dos polinômios tem papel fundamental. Assim, apresentamos uma alternativa para o ensino de métodos de divisão de polinômios através de um episódio histórico da época do império islâmico medieval: o dispositivo de Al-Samaw'al.

Tal episódio histórico, além de alternativa ao ensino da divisão de polinômios tradicionalmente utilizado em sala de aula, possibilita discussões sobre a História das Ciências, em particular da Matemática, de fatos marcantes para o desenvolvimento das culturas.

Além disso, nas salas de aula do Ensino Fundamental se pode utilizar como fonte de discussão, comparações entre a divisão de polinômios pelo dispositivo de al-Samaw'al (Quadro 9) e a divisão euclidiana geralmente apresentada nas aulas tradicionais e nos livros didáticos de matemática da atualidade (Figura 2).

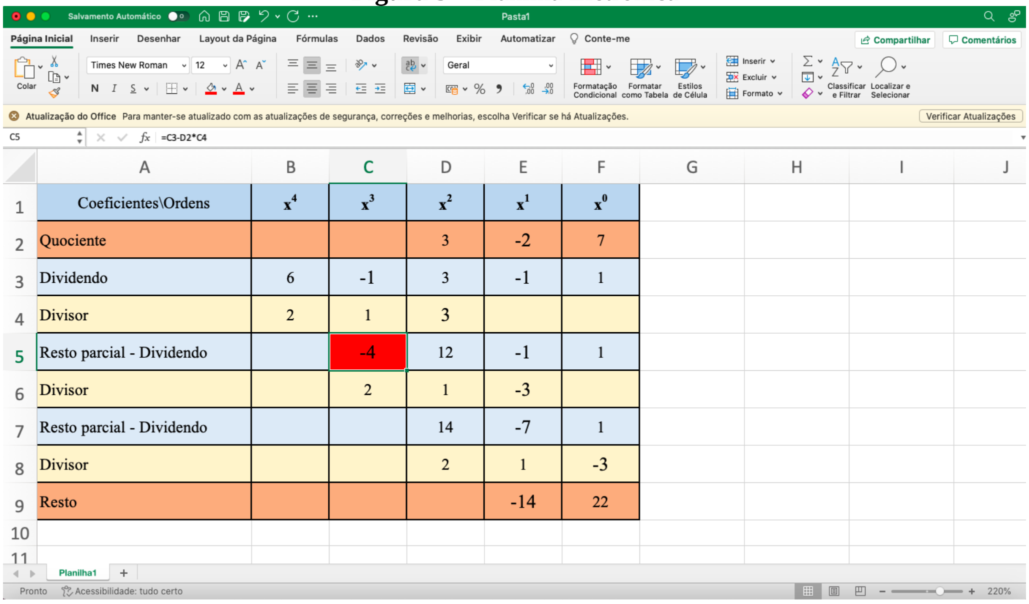
Figura 2 – Dispositivo da divisão tradicional

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
6x^4 & - & x^3 & + 3x^2 & - & x & + & 1 & 2x^2 + x - 3 \\ \cline{9-9}
-6x^4 & & -3x^3 & + 9x^2 & & & & & 3x^2 - 2x + 7 \\ \cline{1-4}
 & & -4x^3 & + 12x^2 & - & x & + & 1 & \\
 & & 4x^3 & + 2x^2 & - & 6x & & & \\ \cline{3-6}
 & & & 14x^2 & - & 7x & + & 1 & \\
 & & & -14x^2 & - & 7x & + & 21 & \\ \cline{4-8}
 & & & & - & 14x & + & 22 &
\end{array}
$$

Fonte: Arquivo do autor

Ainda em nível de Ensino Fundamental, em aulas de Informatica Básica, pode-se utilizar a implementação do dispositivo de divisão de polinômios de al-Samaw'al (Quadro 9) em estudos de planilhas eletrônicas (Figura 3).

Figura 3 – Planilha Eletrônica



Coeficientes\Ordens	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
Quociente			3	-2	7
Dividendo	6	-1	3	-1	1
Divisor	2	1	3		
Resto parcial - Dividendo		-4	12	-1	1
Divisor		2	1	-3	
Resto parcial - Dividendo			14	-7	1
Divisor			2	1	-3
Resto				-14	22

Fonte: Arquivo do autor

Além de permitir a exploração de diversos recursos das planilhas eletrônicas, vale salientar a montagem de algumas células através de operações matemáticas como, por exemplo, a célula destacada em vermelho (Figura 3) representa a expressão matemática destacada na linha fx da barra de funções da planilha.

Como possibilidade de continuidade desse estudo, seria viável a utilização do dispositivo de al-Samaw'al em aulas nível de Ensino Médio que trabalhassem com pensamento computacional, algoritmos ou introdução à computação implementando o algoritmo em linguagem R, Phyton ou outra em discussão nas aulas.

REFERÊNCIAS

BERGGREN, J. L. **Episodes in the Mathematics of Medieval Islam**. 2. ed. New York: Springer, 2016.

FARÈS, N. **Naissance et développement de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe**. Beyrouth: Dār al-Fārābī, 2017.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics**: an introduction. 3. ed. Boston: Pearson, 2009.

MOREY, B.; PEREIRA, A. C. C. **Estudiosos em Ciências e Matemática no Mundo Islâmico Medieval**. Fortaleza: EdUECE, 2021.

RASHED, R. **L'algèbre arithmétique au XII^{e} siècle**: al-Bāhir d'al-Samaw'al. Berlin: De Gruyter, 2021.

RASHED, R. **The development of arabic mathematics**: between arithmetic and algebra. Translated by Angela Armstrong. Boston: Springer, 1994.

YOUSCHKEVITCH, A. P. **Les Mathémathiques Arabes** (VII^{e} XV^{e} siècles). Paris:VRIN [s. d.]

Submetido em: 09 de outubro de 2023.
Aprovado em: 31 de dezembro de 2023.